⑤

Del M-35.9 al M-39.6

MODELOS CORPÓREOS

EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO M-35.7, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{8} = 76.1 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-35.9

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO III", obtenido por truncadura de vértices de un octaedro regular convexo, de arista "a_8", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, la distancia $x = \frac{1}{2} a_8$.- El Arquimediano generado se construirá con las caras macizas, y el octaedro generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-35.7, de igual forma, pero siendo menor el radio de la esfera circunscrita al octaedro generador. ($r_{ec}^8 = 76.1$ mm < 110 mm).

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M-35.7, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción ($k = 76.1 : 110$), o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ec}^8 = 110 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0,69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4-210 x 297

Cañarez Octubre 1980

		Modelo M-35.9

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-35.7, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-35.9, en el que son necesarias, para su construcción, las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES, REGULARES 8 unidades

La figura nº 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes m m	Cotas modificadas m m
Pieza nº 1 8 (u)	77.8	53.8

—

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS 6 unidades

La figura nº 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes	Cotas modificadas
Pieza nº 2 6 (u)	77.8	53.8

—

UNE A4·210 x 297

Cantero Octubre 1980

Modelo M-35.9

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 8 (u)	77.8 5.5	53.8 5

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS 6 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4 6 (u)	77.8 5,5	53.8 5

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 16 unidades

Debido al pequeño tamaño de estas caras, se suprime este refuerzo

---

Eduardo Octubre 1980

		Modelo M-35.9

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS CUADRADAS

12 unidades

La figura 7 correspondiente a este refuerzo, queda sustituida por la siguiente 7' (modificada)

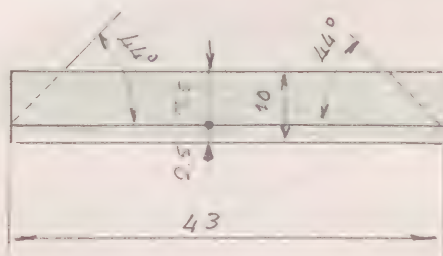


Figura 7'

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 7'

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 24 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 7	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 7 24 (u)	76 4 29° 44°	53 4 29° 44°

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

La figura 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 8 8 (u)	77.8 2	53.8 2

UNE A4 210 x 297

[firma] Octubre 1980

Modelo M-35.9

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

6 unidades

La figura 10 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 10	Longitudes mm	Cotas modificadas
Pieza nº 9	77.8	53.8
6 (u)	2	2

PIEZA Nº 10 DESARROLLO LATERAL DE LAS SEIS PIRÁMIDES TRUNCADAS

6 unidades

La figura 11, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 11	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 10	77.8	53.8
6 (u)	4	3

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 24 unidades

La figura 12 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 12	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 11	76	52.5
24 (u).	3,5	2,5
	44º	44º

UNE A4:210 x 297

[signature] Octubre 1980

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS SEMI-REGULARES CONVEXOS, O "POLIEDROS ARQUIMEDIANOS"

ESTUDIO PREVIO A LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MISMOS.- PROCESO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS, EN LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS REPRESENTADOS EN LAS

LÁMINAS 1 a 5.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 35.10

ENUNCIADO : Estudio previo a la construcción de poliedros Arquimedianos.- Proceso de obtención por el procedimiento de TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS, seguida de una TRUNCADURA DE VÉRTICES, (o viceversa), de los poliedros regulares convexos.

1. GENERALIDADES

En la introducción al modelo M-39.1, en su párrafo 5, expusimos que los trece Arquimedianos del Grupo 1º; el A_3 del Grupo 2º (octaedro regular convexo) y el B_4 del Grupo 3º (exaedro regular convexo), pueden derivarse por varios procesos diferentes, de los cinco poliedros regulares convexos.

Entre ellos, estudiamos y aplicamos en este ejercicio, el denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS", seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de un poliedro regular convexo cualquiera.

La operación geométrica denominada "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de un poliedro regular convexo, fué definida y estudiada en el estudio previo correspondiente al modelo M-39.5, por lo que omitimos su repetición.

La "TRUNCADARA PARALELA DE ARISTAS" la definimos y estudiamos a continuación.

2. DEFINICIOÑES

La operación geométrica denominada "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" de un poliedro regular convexo generador, consiste en cortar los diedros formados por dos caras contiguas, por planos paralelos a sus aristas comunes, siendo al mismo tiempo estos planos perpendiculares al respectivo plano bisector de dichas caras contiguas. La distancia de cada arista al plano secante, ha de ser la misma en todas ellas.

La intersección del plano secante con las dos caras adyacentes a cada arista, será de dos rectas paralelas a dicha arista, y equidistantes de ésta. Estas rectas intersección dan lugar, en cada cara, a la formación de un polígono regular convexo de igual número de lados que el de las caras del poliedro generador, siendo al mismo tiempo paralelos los lados de ambos polígonos.

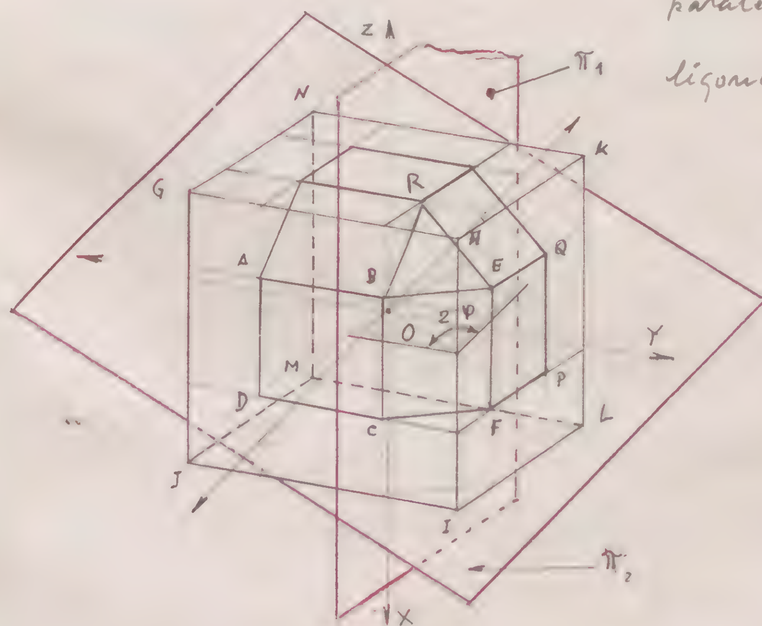


Figura 1

En la figura 1 hemos representado p. e. un poliedro regular generador (exaedro GHIJKLMN) en el que el plano secante π_1 es paralelo a la arista HI, y al mismo tiempo perpendicular al bisector del

ángulo 2φ formado por las caras contiguas GHIJ y HKLI del poliedro generador. La intersección del plano π_1 con la cara GHIJ será pues una recta $\overline{BC}$ paralela a la arista $\overline{HI}$, e igualmente la intersección de π_1 con la cara HKLI, será también otra recta $\overline{EF}$ paralela a la misma arista $\overline{HI}$. Así pues, las rectas $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$, son paralelas entre sí y equidistantes de la arista $\overline{HI}$.

Supongamos ahora que realizamos esta TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS, en todas las aristas del poliedro regular generador, en las que el plano secante π_1 esté siempre a la misma distancia de cada arista, siendo la distancia del plano secante π_1 al centro O del poliedro generador menor que la de la respectiva arista a dicho centro.

Esta truncadura de aristas dará lugar a la formación en cada cara del poliedro generador de polígonos regulares semejantes a los de dichas caras, cuyos respectivos centros son coincidentes y al mismo tiempo tienen sus lados paralelos. En el ejemplo de la figura 1 (en que el poliedro generador es un exaedro) los polígonos de las caras de dicho poliedro generador, (caras GHIJ, HKLI, y las cuatro restantes), son cuadrados, y los polígonos que producen las intersecciones de los planos secantes π_1 en cada cara, son a su vez cuadrados (tales como el ABCD en la cara GHIJ; el EQPF en la cara HKLI, y los cuatro restantes). Estos polígonos regulares, son

pues semejantes, concéntricos y de lados paralelos.

En la figura 2 se presentamos la cara GHIJ del poliedro generador (exaedro) y la ABCD producido por la intersección de los planos secantes π_1 paralelos a las aristas $HI = IJ = JG = GH = a^n$ a la distancia y de sus vértices, siendo a^n, la arista del poliedro y 2φ el ángulo diedro formado por sus dos caras contiguas GHIJ y AKLI

Los polígonos GHIJ y ABCD, son regulares (semejantes), concéntricos y de lados paralelos.

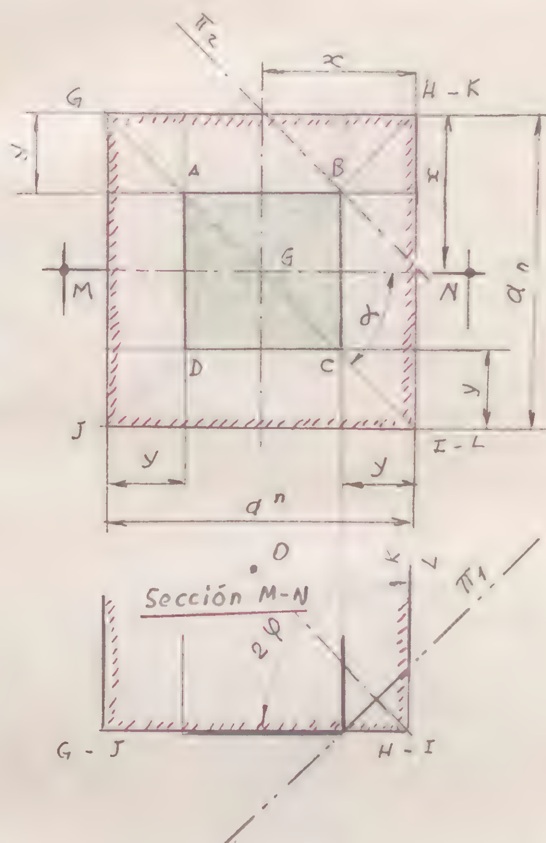


Figura 2

Si unimos un vértice B del polígono regular de n lados $(n = 4)$ con los vértices homólogos situados en las caras que forman el ángulo sólido del vértice H, (todos equidistantes de H) se nos formará el polígono regular BER... (figura 1), de tantos lados como sean el número p de caras concurrentes en cada vértice del mencionado poliedro regular generador.

Estos vértices estarán situados en un plano π_2 perpendicular al radio HO de la esfera circunscrita al poliedro generador. Así pues, el plano π_2 puede considerarse como el plano secante de una truncadura de vértices a la dis-

tancia "x". El polígono regular BER... (figura 1) tiene sus vértices en los puntos medios de los lados del polígono regular que se obtiene por la TRUNCADURA DE VÉRTICES a la distancia "x" del plano π_2.

En la TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS, se puede fijar la posición del plano π_1 (fig. 1) con respecto a la arista correspondiente del poliedro generador, por su mínima distancia, o mejor por las distancias "$y = \overline{QB} = \overline{BS} = \overline{UC} = \overline{CT}$ (fig. 3) en las que el plano secante π_1 corta a las aristas $\overline{TB} = \overline{MC} = \overline{VB} = \overline{NC}$, contiguas a $\overline{BC}$ de dos caras adyacentes del poliedro regular generador.

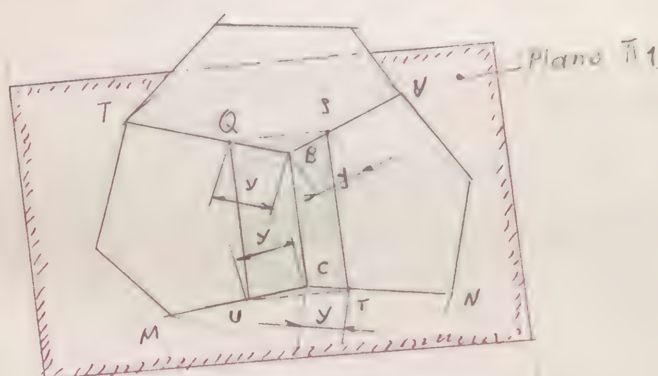


Figura 3

Las distancias x e y no son independientes entre sí, y al fijar una de ellas queda determinada la posición de los planos secantes π_1 y π_2.

3. POLIEDRO NÚCLEO

Si en un poliedro regular convexo cualquiera hacemos una "truncadura paralela de aristas" definida anteriormente, y a continuación una "truncadura de vértices", definida en el párrafo 2 del modelo M-39.5 (o viceversa; 1° la truncadura de vértices y 2° la de aristas) e imaginamos que se retiran las zonas truncadas de ambas truncaduras, quedará como residuo

Álvarez Dbre. 1981

un poliedro convexo al que denominaremos "poliedro núcleo", de las siguientes características geométricas:

a) los planos secantes "π_1" de la "truncadura paralela de aristas (figura 1), producirán en cada cara del poliedro generador, polígonos regulares convexos semejantes a los de dicha cara y situados en ésta (triángulos equiláteros en el tetraedro, octaedro e icosaedro; cuadrados en el exaedro; y pentágonos en el dodecaedro.

b) los planos secantes "π_2" de la "truncadura de vértices" (figura 1), producirán en cada vértice del poliedro generador, polígonos regulares convexos de tantos lados como caras concurran en dicho vértice, y que al unir los puntos medios de los lados de dichos polígonos, se nos formarán otros semejantes a los anteriores, situados en π_2. Los lados de estos últimos son intersecciones de los planos π_1 y π_2. (En el ejemplo de la figura 1 (exaedro), está representado uno de estos polígonos por el triángulo equilátero BER).- Los polígonos regulares de esta truncadura de vértices, son triángulos en el tetraedro, exaedro y dodecaedro; cuadrados en el octaedro; y pentágonos en el icosaedro.

c) Los planos secantes "π_1" y "π_2" producirán también caras rectangulares BEFC (fig. 1), paralelas a cada



Modelo M-35.10

arista del poliedro generador, que podemos considerar asociada a la misma.

El conjunto de polígonos descritos en los apartados anteriores a), b) y c), constituyen en su forma y número, las caras superficiales del poliedro núcleo obtenido en cada poliedro regular al efectuar, sucesivamente en el mismo, una truncadura paralela de aristas y una truncadura de vértices (o viceversa). Los polígonos obtenidos según los apartados a) y b) son siempre regulares cuyos tamaños dependen de la situación relativa de los planos secantes con respecto al poliedro regular generador. Los polígonos obtenidos según el apartado c) son, en general rectángulos que en algún caso especial pueden convertirse en cuadrados, Esto sucederá (ver figura 1), cuando sea $\overline{BE} = \overline{BC}$, para lo cual han de tener los planos secantes π_1 y π_2 una posición especial, definida por los segmentos "x" e "y", cuyas magnitudes determinaremos posteriormente para cada poliedro generador.

La posibilidad de existencia de esta posición especial la la establecemos por las siguientes consideraciones.

En efecto: Cualquier posición del plano π_1, dará lu lugar a la formación de polígonos regulares detallados en el apartado a) cuyos lados irán decreciendo a medida que dicho plano se aproxime al centro "O" del polie-

UNE A4 210 x 297

[illegible] Marc. 1981

dro generador. Por otra parte, la posición del plano π_1 fija a su vez la del plano π_2 (que pasa por los vértices de los polígonos engendrados según el apartado a)) dando lugar este último a la formación de nuevos polígonos regulares, detallados en el apartado b), y cuyos lados van aumentando simultáneamente, a medida que el plano π_2 se aproxima al mencionado centro "O" del poliedro generador. Por consiguiente existirá una posición tal de ambos planos π_1 y π_2 en la que los lados de ambos polígonos detallados en los apartados a) y b), sean iguales.

Ello ocurrirá cuando se cumpla la condición de ser $\overline{BE} = \overline{BC}$ (figura 1).

Como resumen de lo expuesto anteriormente podemos establecer que una "truncadura paralela de aristas" seguida de una "truncadura de vértices" (o viceversa) en un poliedro regular convexo, da lugar a la formación de un "poliedro núcleo" cuyas caras en general, son regulares, excepto las paralelas a las aristas que son rectangulares.

Existe una "posición especial" de los planos π_1 y π_2 de las dos truncaduras en que las caras paralelas a las aristas se transforman en cuadrados, en cuyo caso el "poliedro núcleo" es un "POLIEDRO ARQUIMEDIANO" distinto en cada poliedro regular generador.

Cawarer Dbre. 1981

En el estudio analítico que efectuamos a continuación obtendremos fórmulas generales de las magnitudes lineales de los distintos poliedros Arquimedianos obtenidos por truncadura sucesivas de vértices y aristas de los distintos poliedros regulares generadores.

---

4). CÁLCULO ANALÍTICO DE MAGNITUDES DE POLIEDROS ARQUIMEDIANOS DERIVADOS DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS, NECESARIAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MISMOS.

Como consecuencia de lo expuesto en los párrafos 1) y 2) de este ejercicio, deducimos las siguientes relaciones métricas:

Sea (fig. 4) p. e. ABC... una cara de un poliedro "P_n" regular convexo generador, de arista "a_n" ($n = 4, 6, 8, 12, 20$) y centro "Q" (en el ejemplo de la figura $n = 4$ y P_n = tetraedro). Unamos "Q" con sus "p" vértices ($p = 3, 4, 5$) ABC... (en la figura $p = 3$). Los segmentos QA, QB, QC... serán todos iguales, bisectrices de los ángulos ∡ AQC,

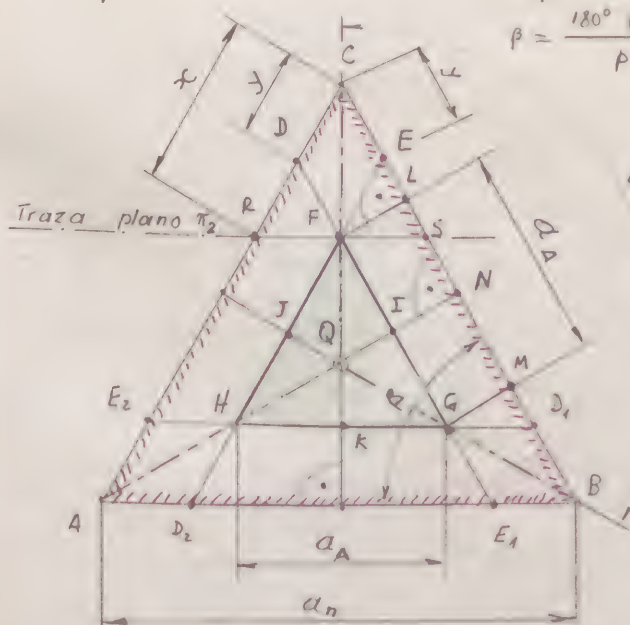


Figura 4

		Modelo M-35.10

∡ CQB; ∡ BQA ---- y mediatrices de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ --- de los polígonos regulares de "p" lados. Los ángulos centrales de estos polígonos tendrán una amplitud $\alpha = \frac{2\pi}{p}$ radianes. La de los ángulos de la cara, otra de $\beta = \frac{\pi}{p}$ radianes $= \frac{\alpha}{2}$ radianes.

Tomemos a partir de cada vértice A, B, C ... de la cara ABC ... del poliedro generador P_n y sobre sus lados, una magnitud "y" arbitraria, con lo que obtendremos los puntos D y E; D_1 y E_1; D_2 y E_2 ..... Tracemos a continuación las rectas $\overline{DE_1}$; $\overline{D_1E_2}$; D_2E .... . Por construcción estas rectas serán paralelas a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ --- de la cara ABC ...., y sus intersecciones nos darán los puntos F, G, H, ... vértices de un nuevo polígono FGH.... semejante al ABC..., concéntrico con éste y de lados paralelos al mismo. Las prolongaciones de los segmentos $\overline{QA}$, QB, $\overline{QC}$, ... cortarán a los lados del polígono FGH en sus puntos medios I, J, K .... . Tracemos a continuación desde los puntos F y Q, perpendiculares a la arista $\overline{CB}$ que cortarán a ésta en los puntos L y M.

Consideremos ahora, en el poliedro regular generador P_n, la cara contigua a la ABC... de arista común BC, y en la que supondremos efectuadas todas las construcciones realizadas en la ABC. Ambas caras formarán entre sí un ángulo diédrico "2φ", medido por su rectilíneo correspondiente.

En la figura 5 representamos por su rectilíneo correspondiente "2φ" el diedro que forman dos caras conti-

UNE A4 210 x 297

Dbre. 1981



guas de arista común BC (fig. 4) (φ es distinto en cada poliedro generador).

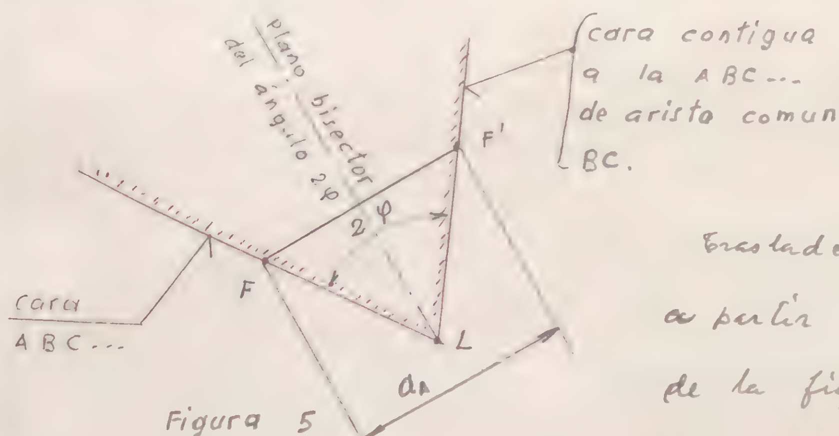


Figura 5

Traslademos a esta figura 5 a partir de L, el segmento FL de la figura 4, y determinemos a continuación el punto F', simétrico del F con respecto al plano bisector del diedro 2φ.

El segmento $\overline{FF'}$ será uno de los lados de las caras rectangulares producidas por el proceso c) del párrafo 3.

Teniendo presente ahora los conceptos desarrollados en este párrafo 4 con sus figuras aclaratorias nº 4 y 5, calculamos seguidamente las siguientes magnitudes:

4.1) ARISTA "a_A" DEL ARQUIMEDIANO NÚCLEO.

Del triángulo isósceles FLF' de la figura 5, se deduce que

a). $$\overline{FL} \operatorname{sen} \varphi = \frac{\overline{FF'}}{2}$$

Establezcamos ahora la condición de ser (ver fig. 4)

b). $$\overline{FF'} = \overline{FG} = a_A$$

UNE A4 210 x 297

Dbre. 1981

De las fórmulas (a) y (b) se deduce:

c) $\overline{FL} = \frac{\overline{FF'}}{2} : \text{sen}\ \varphi = \frac{a_A}{2\ \text{sen}\ \varphi}$

De la figura 4 se deduce que:

d) $\overline{QN} = \overline{QI} + \overline{IN}$ en la que

e) $\overline{QN} = \overline{NB} \cdot \text{ctg} \measuredangle NQB = \frac{a_n}{2} \text{ctg} \frac{\alpha}{2}$ y

f) $\overline{QI} = \overline{IG} \cdot \text{ctg} \measuredangle NQB = \frac{a_A}{2} \text{ctg} \frac{\alpha}{2}$; también

g) $\overline{IN} = \overline{FL} = \frac{a_A}{2\ \text{sen}\ \varphi}$

Sustituyendo en (d) los valores (e), (f) y (g) tendremos la ecuación

h) $\frac{a_n}{2} \text{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a_A}{2} \text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \frac{a_A}{2\ \text{sen}\ \varphi} = a_A \left(\frac{\text{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{1}{2\ \text{sen}\ \varphi} \right)$

y despejando en esta el valor de "a_A", tendremos finalmente:

$$\boxed{a_A} = \frac{a_n\ \text{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2} : \left(\frac{\text{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{1}{2\ \text{sen}\ \varphi} \right) =$$

$$= \frac{\frac{\text{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2}}{\frac{\text{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{1}{2\ \text{sen}\ \varphi}} a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\ \text{sen}\ \varphi} : \frac{\text{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2}} a_n =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2}{2\ \text{sen}\ \varphi \cdot \text{ctg} \frac{\alpha}{2}}} a_n = \frac{1}{\frac{2\ \text{sen}\ \varphi\ \text{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2}{2\ \text{sen}\ \varphi\ \text{ctg} \frac{\alpha}{2}}} a_n = \frac{\text{sen}\ \varphi\ \text{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\ \varphi\ \text{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1} a_n =$$

UNE A4 210 x 297



Modelo M-35.10

$$= \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + 1 : \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \, a_n = \boxed{\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \, a_n}$$

de donde se deduce la fórmula general

$$\boxed{a_A = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \, a_n} \qquad (1)$$

4.2) DISTANCIA "y" QUE FIJA LA POSICIÓN DEL PLANO SECANTE "π_2" EN LA TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS.

De la figura 4, obtenemos las siguientes relaciones:

a) $\overline{CL} = \dfrac{\overline{CB} - \overline{LM}}{2} = \dfrac{a_n - a_A}{2}$

b) $\overline{EL} = \overline{CL} - \overline{CE} = \dfrac{a_n - a_A}{2} - y$

c) $\sphericalangle FEL = \sphericalangle ACB$ = Ángulo interno del polígono regular de una cara de "p" lados $= \beta = \dfrac{180° (p-2)}{p}$ $(p = 3, 4, 5)$

d) $\overline{EF} = \overline{CD} = y$

En el triángulo rectángulo FLE, tendremos:

e) $\overline{EL} = \overline{FE} \cos FEL = y \cos \beta$

Sustituyendo en b) el valor e), tendremos la ecuación

f) $y \cos \beta = \dfrac{a_n - a_A}{2} - y$ en la que despejando "y" será:

$y \cos \beta + y = \dfrac{a_n - a_A}{2}$; $y (\cos \beta + 1) = \dfrac{a_n - a_A}{2}$; (sigue:)

UNE A4 210 x 297

[signature] Dbre. 1981

$$y = \frac{a_n - a_\Delta}{2} : (\cos\beta + 1) = \frac{a_n - a_\Delta}{2\cdot(\cos\beta + 1)}$$ en la que sustituiremos

a_Δ por su valor (1). Tendremos finalmente:

$$\boxed{y} = \frac{a_n - \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} a_n}{2\times(\cos\beta + 1)} = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}{2(\cos\beta + 1)} a_n =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} : 2(\cos\beta + 1)\, a_n = \boxed{\frac{\operatorname{tg}\cdot\frac{\alpha}{2}}{2(\cos\beta + 1)(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})} a_n}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{y = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2(\cos\beta + 1)(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})} a_n} \qquad (2)$$

4.3) DISTANCIA "x" QUE FIJA LA POSICIÓN DEL PLANO SECANTE "π_2" EN LA TRUNCADURA DE VÉRTICES

De la figura 4, obtenemos las siguientes relaciones:

a) $$\overline{CL} = \frac{\overline{CB} - \overline{LM}}{2} = \frac{a_n - a_\Delta}{2}$$

Del triángulo rectángulo CLF, obtenemos:

b) $$\overline{CF} = \overline{CL} : \cos\measuredangle LCF = \overline{CL} : \cos\measuredangle\frac{ABC}{2} = \frac{a_n - a_\Delta}{2} : \cos\frac{\beta}{2} =$$

$$= \frac{a_n - a_\Delta}{2\cos\frac{\beta}{2}}$$ Del triángulo rectángulo CFR, obtenemos

c) $$x = \overline{CR} = \overline{CF} : \cos\measuredangle FCR = \overline{CF} : \cos\measuredangle\frac{ABC}{2} = \overline{CF} : \cos\frac{\beta}{2}$$

sustituyendo en c) el valor de b), será:

$$x = \frac{a_n - a_A}{2 \cos \frac{\beta}{2}} : \cos \frac{\beta}{2} = \frac{a_n - a_A}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

Sustituyendo el valor de a_A (fórmula 1), tendremos:

$$\boxed{x} = \frac{a_n - \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} a_n}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} a_n =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \varphi}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)} a_n = \boxed{\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)} a_n}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)} a_n} \qquad (3)$$

4.4) ARISTA LATERAL "a_ℓ" DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES QUE FIJAN LA POSICIÓN DE LOS VÉRTICES DEL POLIEDRO REGULAR GENERADOR, CON RESPECTO AL ARQUIMEDIANO GENERADO.

Dicha arista es el segmento $\overline{CF}$ de la figura 4. De esta figura se obtienen las siguientes relaciones:

a) $\overline{CL} = \dfrac{\overline{CB} - \overline{LM}}{2} = \dfrac{a_n - a_A}{2}$

Del triángulo CLF, deducimos:

b) $a_\ell = \overline{CF} = \overline{CL} : \cos \measuredangle LCF = \overline{CL} : \cos \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{a_n - a_A}{2} : \cos \dfrac{\beta}{2} =$

Dic. 1981



$$= \frac{a_n - a_A}{2 \cos \frac{\beta}{2}}$$ en la que sustituimos a_A por su valor (1). - Así pues será:

$$\boxed{a_l} = \frac{a_n - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} a_n}{2 \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{2 \cos \frac{\beta}{2}} a_n =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \varphi}{2 \cos \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)} a_n = \boxed{\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)} a_n}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_l = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)} a_n} \qquad (4)$$

Con los conceptos desarrollados en este estudio previo, y aplicando las fórmulas generales (1), (2), (3) y (4), podemos construir el siguiente modelo M-35.10, correspondiente al enunciado explícito del mismo, que exponemos a continuación.

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO III" OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE ARISTA "a_4", A LA DISTANCIA $y = \frac{1}{4} a_4$, SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE VÉRTICES (O VICEVERSA) A LA DISTANCIA $x = \frac{1}{2} a_4$, AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LAS DISTANCIAS "y" Y "x" RESPECTIVAMENTE. EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro regular

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-35.10

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO III, obtenido por "truncadura paralela de aristas" de un tetraedro regular convexo de arista "a_4", a la distancia "$y = \frac{1}{4} a_4$" seguida de una "truncadura de vértices" (o viceversa) a la distancia "$x = \frac{1}{2} a_4$", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente. El arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el tetraedro regular convexo generador con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^4 = Radio de la esfera circunscrita al tetraedro regular generador:

$$r_{ec}^4 = 110 \text{ mm}$$

1). GENERALIDADES

En el ESTUDIO PREVIO realizado anteriormente, desarrollamos y aplicamos a continuación, el proceso geométrico denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de un poliedro regular convexo cualquiera.

Este proceso da lugar a la formación de un poliedro núcleo, convexo, cuyas características geométricas, en general, detallamos en su párrafo 2. y que en particular,

UNE A4 210 x 297

Álvarez. Dbre. 1981

y en el caso especial descrito en este enunciado, dicho poliedro núcleo es un ARQUIMEDIANO.

Las características geométricas del poliedro núcleo obtenido en este ejercicio, se deducen previamente de las generales detalladas en el mencionado EJERCICIO PREVIO, y son:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas producen en el caso del tetraedro regular, 4 triángulos equiláteros situados en las caras de este poliedro generador.

b) Los planos secantes "π_2" de la truncadura de vértices producen a su vez otros 4 triángulos equiláteros (uno en cada vértice), iguales a los anteriores y situados en el plano secante "π_2".

c) Los planos secantes "π_1" y "π_2" al cortarse mutuamente producen a su vez 6 cuadrados (uno por cada arista), paralelos a las aristas del poliedro generador.

Por consiguiente, el poliedro núcleo estará limitado por OCHO CARAS TRIANGULARES REGULARES y SEIS CUADRADOS.

Estas son las características geométricas del ARQUIMEDIANO III, estudiado y representado en el ejercicio



Modelo M-35,10

G.E. nº....- Lámina 35, que detallamos a continuación:

ARQUIMEDIANO III

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$
Número de caras cuadradas	$C_4 = 6$
Número de vértices	$V = 12$
Número de aristas	$A = 24$
Número de caras en cada vértice	$2C_3 + 2C_4$

---

2). POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1" de la "truncadura paralela de aristas" y de los "π_2" de la "truncadura de vértices" con respecto al poliedro regular generador, se obtiene mediante las respectivas distancias "y" y "x", tomadas sobre las aristas y a partir de los vértices.

Para que el poliedro núcleo sea un Arquimediano se han obtenido en el estudio previo a este ejercicio, fórmulas generales (fórmula (3) párrafo 4.3, para la determinación de "x", y (fórmula (2), párrafo 4.2 para la de "y"), que aplicaremos a este ejercicio

2.1) Distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la truncadura paralela de aristas

		Modelo M-35.10

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro generador, de la fórmula general (2), deducida en el estudio previo

$$y = \frac{tg.\ \frac{\alpha}{2}}{2\left(\cos\beta + 1\right)\left(\operatorname{sen}\varphi + tg\ \frac{\alpha}{2}\right)}\ a_n \qquad (2)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al tetraedro regular convexo generador.

a) n = Número de caras del tetraedro = 4.

b) a_n = Arista del tetraedro = a_4

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360°}{3} : 2 = 60°$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del tetraedro

e) $\cos\beta = \cos\frac{180° \times (3-2)}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}$ (ver ejercicio G.P. 1006)

f) $tg\ \frac{\alpha}{2} = tg.\ 60° = \sqrt{3}$ (ver ejercicio G.P. 1006)

g) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ver ejercicio G.P. n°.....- Lamina 1)

Aplicando estos valores a la fórmula (2), tendremos:

Modelo M- 35.10

$$\boxed{y} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \left(\frac{1}{2}+1\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right)}\, a_4 = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}\right)}\, a_4 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3 \times \frac{\sqrt{3}\,(3+1)}{3}}\, a_4 = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\, a_4 = \boxed{\frac{1}{4}\, a_4}$$

Este valor de "y" justifica el expresado en el enunciado de este ejercicio.

Puede obtenerse también en función de r_{ec}^{4}, (dato de este modelo), sustituyendo $a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^{4}$, valor que obtendremos posteriormente. Así pues será:

$$\boxed{y} = \frac{1}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^{4} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}\, r_{ec}^{4}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{y} = \frac{\sqrt{6}}{6} \times 110 \cong 0,40\ 82\ 48\ 29\ 1\ldots \times 110 \cong \boxed{44,9 \quad mm}$$

2.2) Distancia "x" que fija la posición del plano "π_2" en la truncadura de vértices.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro generador, de la fórmula (3), deducida en el estudio previo

$$\boxed{x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)}\, a_n} \qquad (3)$$

UNE A4 210 x 297

Tawara   Dbre. 19.81

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al tetraedro regular convexo generador.

a) n = Número de caras del tetraedro = 4

b) a_n = Arista del mismo. = a_4

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360^\circ}{3} : 2 = 60^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del tetraedro.

e) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ (ver ejercicio G. P. 1006)

f) $\cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{180^\circ (3-2)}{2 \times 3} = \cos^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ (ver G.P. 1006)

g) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ver ejercicio G. P. nº.... Lámina 1)

Aplicando estos valores a la fórmula (3), tendremos:

$$\boxed{x} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right)} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2} \times \left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{3}\right)} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}(3+1)}{3}\right)} a_4 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{2}} a_4 = \frac{2}{4} a_4 = \boxed{\frac{1}{2} a_4}$$

Este valor de "x" justifica el expresado en el enunciado de este ejercicio.

Puede obtenerse también en función de r_{ec}^4 (dato de este

UNE A4 210 x 297

modelo) sustituyendo $a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4$ valor que obtendremos posteriormente. Así pues, será:

$$x = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4}$$

su valor numérico, será:

$$x = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 110 \cong 0,81\ 64\ 96\ 58\ 1\ldots \times 110 \cong \boxed{89,8 \text{ mm}}$$

---

3). CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo son necesarias las siguientes piezas:

3.1) TETRAEDRO REGULAR GENERADOR, DE CARAS VACIADAS. - ARISTA DEL MISMO

Su valor se obtiene de la fórmula " $r_{ec}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4$ ", deducida en el ejercicio G.E. nº---- Lámina 1. Despejando en ella " a_4 " tendremos:

$$a_4 = r_{ec}^4 : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{4}{\sqrt{6}} r_{ec}^4 = \frac{4\sqrt{6}}{6} r_{ec}^4 = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4}$$

valor que hemos utilizado en los párrafos 2.1 y 2.2

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

UNE A4 210 x 297

Calvarez Dbre. 1981

El valor numérico de la arista "a_4" se obtiene de la fórmula anterior:

$$\boxed{a_\Delta} = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 \cong 1,63\ 29\ 93\ 16\ 2\ldots \times 110 \cong \boxed{179.6 \quad mm}$$

Su forma y dimensiones son iguales a los de la fig 1 del ejercicio M-1.102

PIEZA Nº 1 4(u)

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a los de la figura 2 del ejercicio M-1.102

PIEZA Nº 2 6 (u)

3.2) ARQUIMEDIANO III (NÚCLEO DEL TETRAEDRO GENERADOR), DE CARAS MACIZAS, INCLUIDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACION DE LOS VÉRTICES DEL TETRAEDRO GENERADOR A LAS CARAS TRIANGULARES DEL ARQUIMEDIANO III.

3-2.1) Longitud 'a_{III} de la arista del Arquimediano III engendrado por el tetraedro regular P_4

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro generador de la fórmula (1), deducida en el estudio previo

$$\boxed{a_\Delta = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} a_n} \qquad (1)$$

UNE A4 210 x 297

Dbre. 1981

		Modelo M-35.10

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al tetraedro regular convexo generador:

a) "a_n" = a_4 = Arista del tetraedro generador

b) "a_Δ" = a_{III} = Arista del Arquimediano generado.

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360°}{3} : 2 = 60°$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del tetraedro

e) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{Tg} 60° = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

f) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ver ejercicio G.P. nº... Lámina 1)

Aplicando estos valores a la fórmula (1), tendremos:

$$\boxed{a_{III}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}\, a_4 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{3}}\, a_4 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,(3+1)}\, a_4 = \boxed{\frac{1}{4}\, a_4}$$

Puede obtenerse a_{III} en función de $r_{ec}^{\,4}$ (dato de este modelo), sustituyendo $a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{\,4}$, valor obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio. Así pues será:

$$\boxed{a_{III}} = \frac{1}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{\,4} = \frac{2\sqrt{6}}{6}\, r_{ec}^{\,4} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}\, r_{ec}^{\,4}}$$

El valor numérico de la arista a_{III}, se obtiene de la fórmula anterior.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Dbre. 1981

Modelo M-35.10

$$\boxed{a_{III}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\, r_{ec}^{4} = \frac{\sqrt{6}}{6} \times 110 \cong 0.40\,82\,48\,29\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{44.9 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

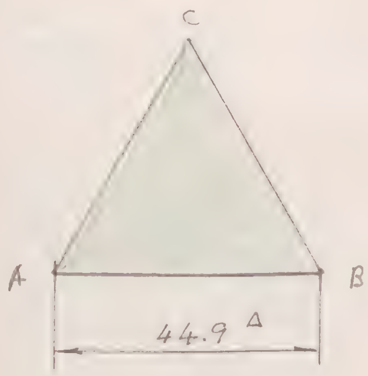


Figura 1

PIEZA Nº 3 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

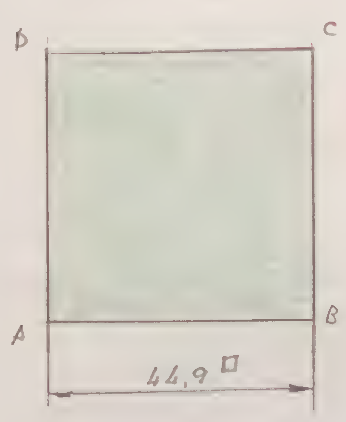


Figura 2

PIEZA Nº 2 6 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES 8 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del triángu-

lo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3

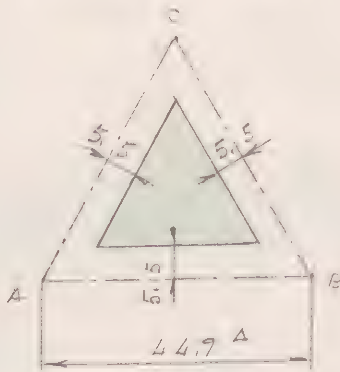


Figura 3

PIEZA N° 3

8 (u)

Figura 3

PIEZA N° 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

6 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 4

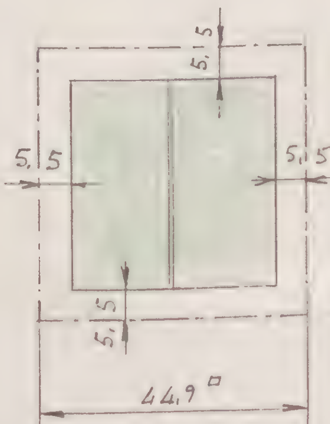


Figura 4

PIEZA N° 4

6 (u)

Figura 4

PIEZA N° 7 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS CUADRADAS

6 unidades

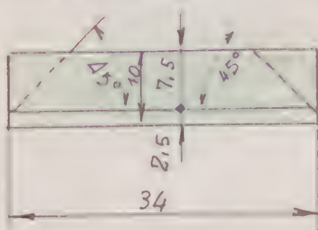


Figura 5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación en la figura 4

PIEZA N° 5 6 (u) (fig. 5)

Alvarez Dbre. 1981

UNE A4 210 x 297

Modelo M-35.10

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 24 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 6

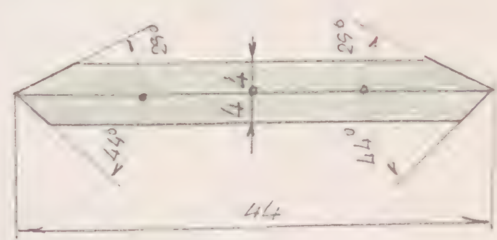


Figura 6

PIEZA Nº 9 24 (U)

Figura 6

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

8 unidades

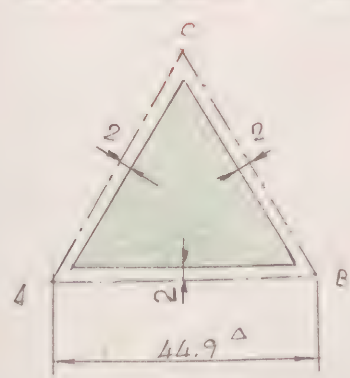


Figura 7

La forma y dimensiones se deducen del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 7

PIEZA Nº 9 8 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

6 unidades

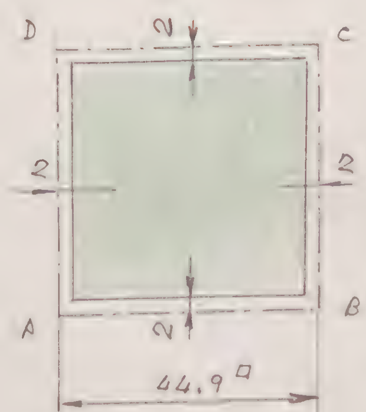


Figura 8

La forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 10 6 (u)

Figura 8

UNE A4 210 x 297

Tavares Dbre. 1981

Modelo M-35.10

3-2.2) Arista lateral "a_ℓ" de las pirámides auxiliares triangulares que fijan la posición de los vértices del tetradro generador con respecto al Arquimediano III.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del tetraedro generador, de la fórmula (4), deducida en el estudio previo.

$$a_\ell = \frac{tg \frac{\alpha}{2}}{2 \cos\frac{\beta}{2} \left(sen\, \varphi + tg\frac{\alpha}{2}\right)} a_n \qquad (4)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al tetraedro regular generador:

a) "a_n" = a_4 = Arista del tetraedro

b) $a_\ell = a_3^{III}$ = Arista lateral de la pirámide triangular

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360°}{3} : 2 = 60°$

d) φ = Semiángulo que forman dos caras contiguas del tetraedro.

e) $tg\frac{\alpha}{2} = tg.\ 60° = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

f) $\cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{180°\times(3-2)}{2\times 3} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (ver G.P. 1006)

g) $sen\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Ver ejercicio G.P. nº ---- Lámina 1)

Aplicando estos valores a la fórmula 4, tendremos:

UNE A4 210 x 297

Alvarez Dtr. 11.71

$$\boxed{a_3^{III}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right)} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}\right)} a_4 = \frac{1}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} a_4 =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{3}} a_4 = \frac{3\sqrt{3}}{12} a_4 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4} a_4}$$

Puede obtenerse "a_3^{III}" en función de r_{ec}^4 (dato de este modelo), sustituyendo $a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4$, valor obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio. Así pues, será:

$$\boxed{a_3^{III}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 = \frac{\sqrt{18}}{6} r_{ec}^4 = \frac{3\sqrt{2}}{6} r_{ec}^4 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} r_{ec}^4}$$

El valor numérico de la arista a_3^{III}, se obtiene de la fórmula anterior

$$\boxed{a_3^{III}} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_{ec}^4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 110 \cong 0,70\,71\,06\,78\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{77,8 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 11 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES TRIANGULARES 4 unidades

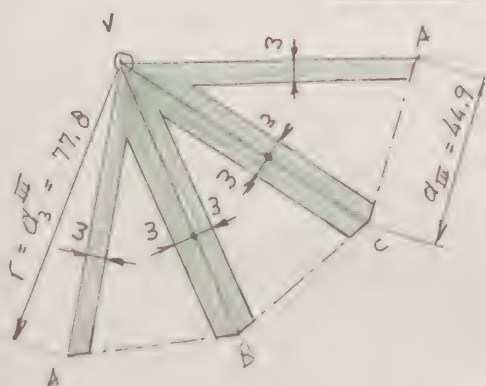


Figura 9

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a_{III}$

PIEZA Nº 10 4 (u)

Figura 9

Modelo M-35.10

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES TRIANGULARES

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

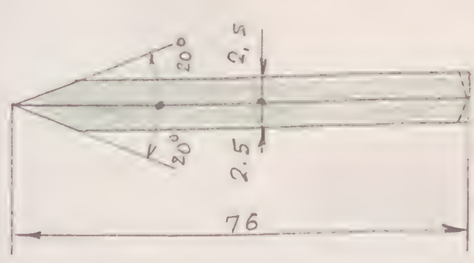
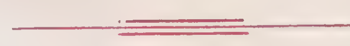


Figura 10

PIEZA Nº 11 12 (u)

Figura 10



UNE A4 210 x 297

Alvarez Diciembre 1981

MODELO M- 35.10 Patrones



	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 36.1

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO IV", FORMADO POR VEINTE CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3), Y DOCE CARAS PENTAGONALES REGULARES (C_5), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE. $2C_3 + 2C_5$.

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{ec}^{IV} = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 36.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO IV", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3) y doce caras pentagonales regulares (C_5), concurriendo en cada vértice $2C_3 + 2C_5$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G.E. nº.... - Lámina 36, y representado en sus vistas principal, superior y lateral izquierda en la mencionada lámina 36, a escala 1:1, con el radio r_{ec}^{IV} de su esfera circunscrita, de $r_{ec}^{IV} = 55$ mm.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{IV} = 110 \text{ mm}$$

Las características geométricas del ARQUIMEDIANO IV, son las siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
Número de vértices $= \frac{20 \times 3 + 12 \times 5}{4} =$	$V = 30$
Número de aristas $= \frac{20 \times 3 + 12 \times 5}{2} =$	$A = 60$
Número de caras en un ángulo sólido:	$2C_3 + 2C_5$

Estévez Diciembre 1980

		modelo M- 36.1

Para poder obtener el despiece de este poliedro, calculemos previamente la longitud "a_{IV}" de la arista del mismo, en función del radio "r_{ec}^{IV}" de su esfera circunscrita. Para ello utilizaremos la fórmula "$r_{ec}^{IV} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a_{IV}$" deducida en el mencionado ejercicio G. E. nº ....- Lámina 36, que nos da el valor de la esfera circunscrita, en función de la arista a_{IV} del Arquimediano IV.- Despejando en ella a_{IV}, tendremos:

$$\boxed{a_{IV}} = r_{ec}^{IV} : \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \times r_{ec}^{IV} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} r_{ec}^{IV} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} r_{ec}^{IV} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2} r_{ec}^{IV}} \qquad (1)$$

Para el caso estudiado ($r_{ec}^{IV} = 110$ mm), tendremos:

$$\boxed{a_{IV}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r_{ec}^{IV} \cong 0,6180339 89\ldots \times 110 \cong \boxed{68,0 \text{ mm}}$$

Esta sola magnitud nos permite la construcción del poliedro estudiado, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

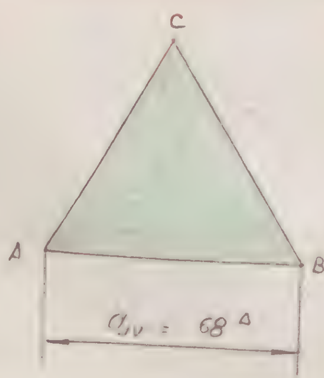


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1



Modelo M-36.1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

Para la mayor exactitud en el trazado de este pentágono regular convexo, calculamos previamente el valor del radio r_{c-5} de su circunferencia circunscrita, el cual es el siguiente (ver fórmula (3) G.P. 1.400-44)

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_5 \cong 0,85065... \times 68.0 \cong 57.8 \text{ mm}$$

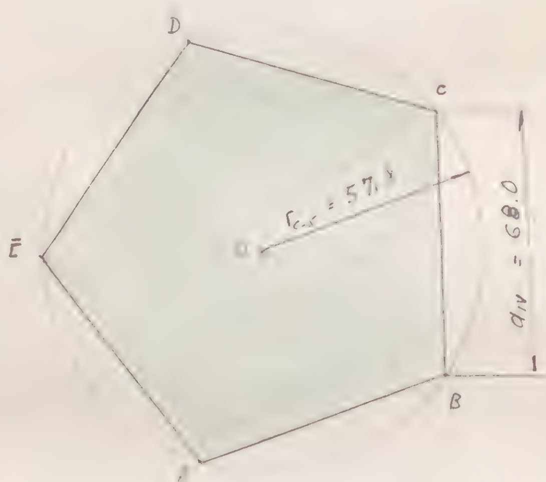


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2

12 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

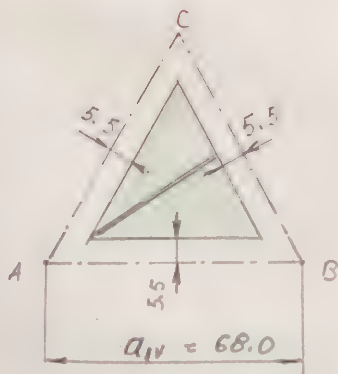


Figura 3

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 3 20 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Tabares Diciembre 1980

Modelo M- 36.1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

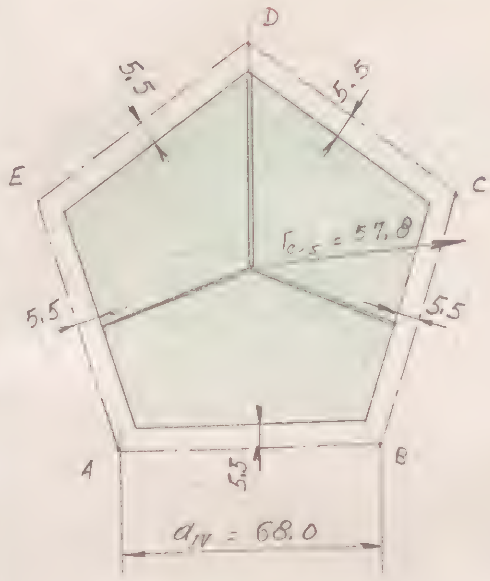


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular convexo ABCDE de la figura 2, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

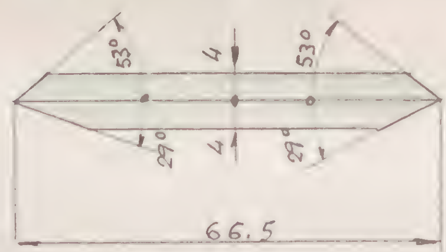


Figura 5

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 40 unidades (Simétricas dos a dos)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación, en la figura 3

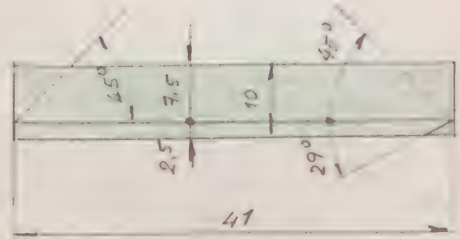


Figura 6

PIEZA Nº 6 40 (u) (Simétricas dos a dos)

[signature] Diciembre 1980

Modelo M-36.1

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES

36 unidades
(simétricas dos a dos)

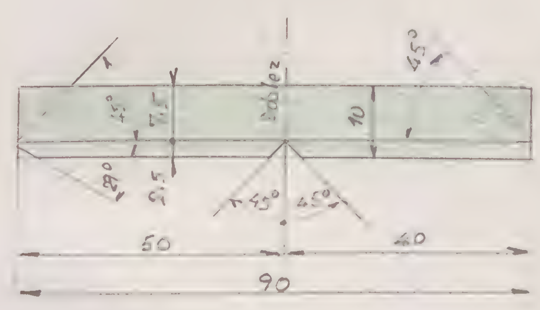


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación, en la figura 4.

PIEZA Nº 7 36 (u)
(simétricas dos a dos)

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

20 unidades

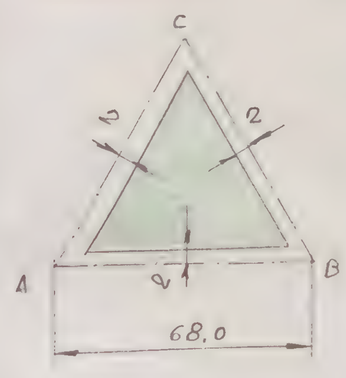


Figura 8

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 8 20 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES

12 unidades

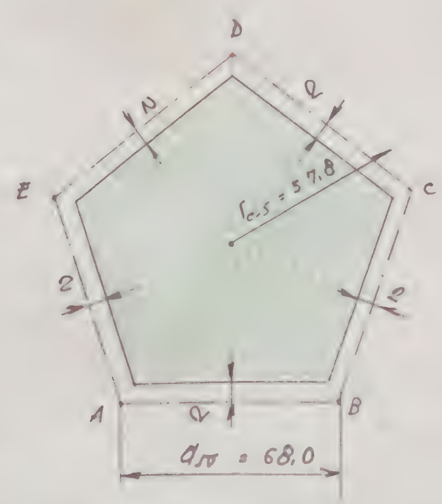


Figura 9

Su forma y dimensiones, se deducen de las del pentágono regular convexo ABCDE de la figura 2, y se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 9 12 (u)

Figura 9

UNE A4 210 x 297

Calvarez Diciembre 1980

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO

DE CARAS VACIADAS "ARQUIMEDIANO IV",

FORMADO POR VEINTE CARAS TRIANGULARES,

REGULARES (C_3) Y DOCE CARAS PENTAGO-

NALES REGULARES (C_5), CONCURRIENDO EN

CADA VÉRTICE $2C_3 + 2C_5$.

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{ec}^{IV} = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras variadas "ARQUIMEDIANO IV", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3), y doce caras pentagonales regulares convexas (C_5), concurriendo en cada vértice $2C_3 + 2C_5$.

Este modelo puede considerarse como una variante del M-36.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras variadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M-36.1.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{IV} = radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{IV} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este poliedro, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 1

Modelo M-36.2

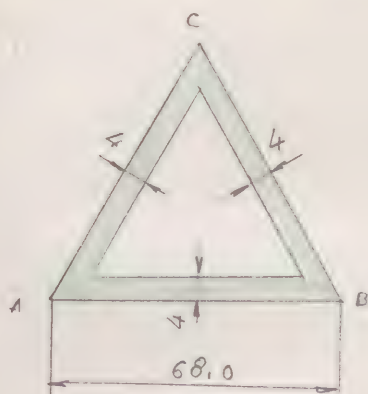


Figura 1

PIEZA Nº 1

20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = 68,0$ mm

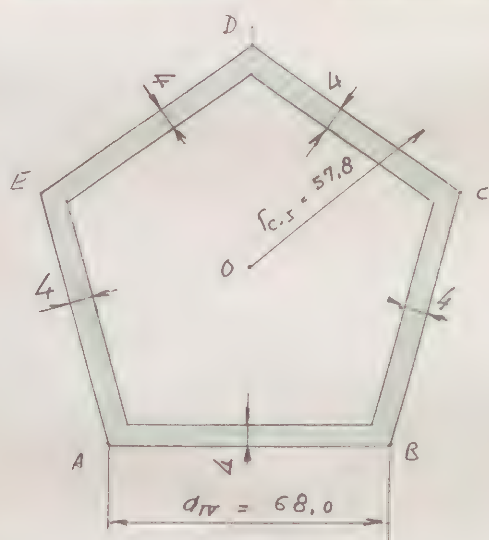


Figura 2

PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

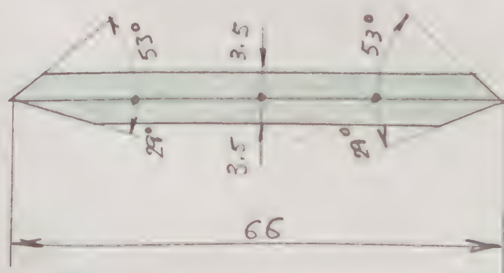


Figura 3

PIEZA Nº 3

60 (u)

Figura 3

VARIANTE DEL MODELO M-36.1,

DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIEN-

DO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU

ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{IV}^{ee} = 76,1 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO IV", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3), y doce caras pentagonales, regulares, convexas, (C_5), concurriendo en cada vértice $2 C_3 + 2 C_5$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M - 36.1, de igual forma que éste, siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{IV} = 76.1$ mm < 110)

Para obtener el despiezo de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M - 36.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción, $k = 76.1 : 110$, o relación de los radios correspondientes de sus respectivas esferas circuns-critas

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

$$r_{ec}^{IV} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\overline{18}..$$

		Modelo M- 36.3

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido consignadas en las diferentes figuras del modelo M- 36.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M - 36.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES, REGULARES.

20 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1 20(u)	68.0	47.0

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº2 12 (u)	68.0 57,8	47,0 34,0

UNE A4 210 x 297

(firma) Diciembre 1980



		Modelo M-36.3

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 20 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3 20 (u)	68.0 5.5	47.0 4.0

—

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4 12 (u)	68.0 57.8 5.5	47.0 34.0 4.0

—

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 60 unidades.

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

Modelo M-36.3

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº5	66.5	45.5
60 (u)	4.0	4.0
	29°	29°
	53°	53°

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES

No es necesario este refuerzo, por ser muy pequeñas estas caras triangulares.

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES 36 unidades

La figura 7, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 7	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 7	50	34.0
36(u)	40	28.0
	90	68.0
	2.5	2.5
	7.5	7.5
	10.0	10.0
	29°	29°
	45°	45°

UNE A4 210 x 297

Álvarez Noviembre 1980

Modelo M-36.3

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

20 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 8 20 (u)	68,0 2,0	47,0 2,0

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES

12 unidades

La figura 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 9 12 (u)	68,0 2,0	47,0 2,0

UNE A4 210 x 297

[signature] Diciembre - 1980

VADIANTE DEL MODELO M-36.2,

DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIEN-

DO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU

ESFERA CIRCUNSCRITA

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{IV} = 76.1 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-36.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO IV", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3), y doce caras pentagonales regulares (C_5), concurriendo en cada vértice $2C_3 + 2C_5$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-36.2, de igual forma que éste, pero siendo más pequeño el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{IV} = 76.1 < 110$)

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico desarrollado en el modelo M-36.2, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción ($k = 76.1 : 110$), o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{IV} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN:

$$k = \frac{76.1}{110} = 0,69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

Calvares Diciembre 1980

Modelo M-36.4

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-36.2, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-36.4, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES

20 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1	68,0	47,0
20(u)	4.0	3.0

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2	68,0	47,0
12 (u)	57,8	34,0
	4.0	3,0

Modelo M-36.4

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 60 unidades

La figura 3. ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3	66	46.0
60 (4)	3.5	2.5
	29°	29°
	53°	53°

Calvarez Diciembre 1980

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO IV" OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_{12}", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA $\frac{1}{2} a_{12}$. EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL DODECADRO REGULAR GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 36.5

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO IV" obtenido por truncadura de vértices de un dodecaedro regular convexo, de arista "a_{12}", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, la distancia $x = \frac{1}{2}\, a_{12}$. El Arquimediano obtenido se construirá con las caras macizas, y el dodecaedro regular generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{12} = radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$

Teniendo presente lo expuesto en las CONSIDERACIONES PREVIAS del modelo M-40.5, en la que se destaca el proceso geométrico denominado TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, y por el que se obtienen muchos de los POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, entre los que se encuentra el ARQUIMEDIANO IV de este ejercicio, podemos establecer de inmediato las siguientes propiedades del poliedro nuclear que se obtiene por truncadura de vértices del dodecaedro regular convexo, a la distancia "$x = \frac{1}{2} \cdot a_{12}$". El valor de "$x$" se obtiene de las condiciones geométricas siguientes, cuando el plano secante produzca:

UNE A4 210 x 297

Tavares Diciembre 1980



Modelo M-36.5

a) En las caras del dodecaedro generador, polígonos regulares convexos de igual (o doble) número de lados que los de las mencionadas caras (en este caso particular, estos polígonos serán pentágonos regulares convexos, cuyos vértices son los centros de los lados de las caras del dodecaedro generador).

b) En los ángulos sólidos de los vértices, polígonos regulares convexos de tantos lados como caras concurran en los vértices del dodecaedro generador, y situados en el plano secante (en este caso particular serán triángulos equiláteros).

Así pues: Por la condición a) el poliedro núcleo tendrá doce caras pentagonales, regulares, convexas, C_5 sobre las caras del poliedro generador, y

Por la condición b) tendrá también veinte caras triangulares regulares, C_3 sobre el plano secante.

Consecuentemente, el poliedro núcleo resultante de esta truncadura de vértices, tendrá las siguientes características geométricas:

(ver cuadro página siguiente)

UNE A4 210 x 297



1)	Número de caras pentagonales, regulares, convexas =	$12\ C_5$
2)	Número de caras triangulares, regulares =	$20\ C_3$
3)	Número de vértices: $= \frac{12 \times 5 + 20 \times 3}{4} =$	30 V
4)	Número de aristas $= \frac{12 \times 5 + 20 \times 3}{2} =$	60 A
5)	Número de caras en cada vértice =	$2\ C_3 + 2\ C_5$

Así pues, y a la vista de los resultados anteriores, se deduce que el poliedro núcleo convexo, resultante de la truncadura de vértices en el dodecaedro regular convexo, es un ARQUIMEDIANO IV, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº... .- Lámina 36.

Las conclusiones anteriores justifican el enunciado de este ejercicio.

CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

Previamente a la construcción de este modelo, calculamos las siguientes magnitudes en función de r_{ec}^{12}, dato de este ejercicio.

1) Arista "a_{12}" del dodecaedro generador

Se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\ a_{12}$", deducida

		Modelo M-36.5

en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 4; despejando en ella "a_{12}", tendremos:

$$\boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}} \times r_{ec}^{12} = \frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{15-3} r_{ec}^{12} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}} \qquad (1)$$

---

2) Distancia "x" por la que la truncadura de vértices del dodecaedro regular convexo, produce al ARQUIMEDIANO IV

Cuando la distancia "x" sea igual a $\frac{1}{2} a_{12}$, la truncadura de vértices en el dodecaedro regular convexo, produce en las caras del mismo, pentágonos regulares convexos, cuyos vértices coinciden con los centros de los lados de los pentágonos de las caras del dodecaedro generador (condición a).

Así pues, tendremos que

$$x = \frac{1}{2} a_{12}$$

y sustituyendo "a_{12}" por su valor (1), tendremos finalmente que

$$\boxed{x} = \frac{1}{2} a_{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6} r_{ec}^{12}} \qquad (2)$$

---

3) Arista "a_{IV}" del Arquimediano IV

Sea (figura 1) ABCDE el pentágono regular convexo, contorno de una cara del dodecaedro generador, de lado "a_{12}".

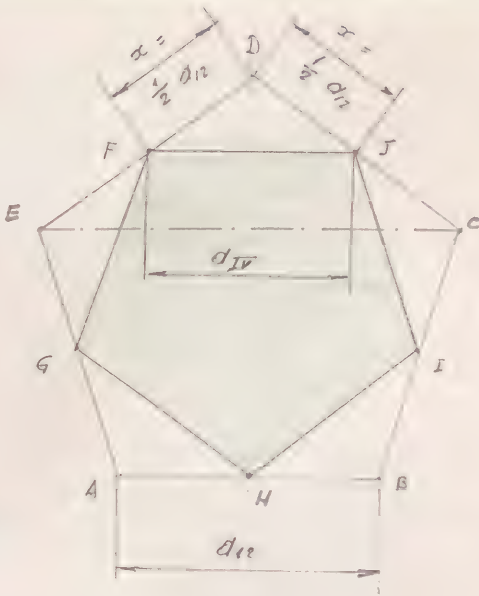


Figura 1

La truncadura de vértices a la distancia $x = \frac{1}{2} a_{12}$, da lugar en dicha cara, a la formación del pentágono FGHIJ, regular convexo, cuyos vértices son los centros de los lados del pentágono ABCDE, siendo los lados de este último, las aristas a_{IV} del Arquimediano IV, generado.

Así pues tendremos que

$$\overline{FJ} = a_{IV} \qquad (3)$$

Unamos E con C, con lo cual se obtiene el triángulo DEC, semejante al FDJ (los lados FJ y EC, son paralelos; la razón de semejanza de dichos triángulos es $\frac{1}{2}$, por lo que será:

$\overline{FJ} = \frac{1}{2} \overline{EC}$, siendo $\overline{FJ} = a_{IV}$ y $\overline{EC}$, la diagonal del pentágono ABCDE; su valor, en función del lado a_{12} es (ver G.P. 1.400-44 (6)):

$$\overline{EC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a_{12} \qquad (4)$$

Así pues, será:

$$\boxed{a_{IV}} = \overline{FJ} = \frac{1}{2} \overline{EC} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}+1}{2} a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{4} a_{12}} \qquad (5)$$

y sustituyendo en (5), "a_{12}" por su valor (1), tendremos finalmente:

UNE A4 210 x 297

Modelo M-36.5

$$\boxed{a_{IV}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\, a_{12} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{75}+\sqrt{15}-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12}\, r_{ec}^{12} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{3}}{12}\, r_{ec}^{12} = \frac{4\sqrt{3}}{12}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}} \quad (6)$$

Las fórmulas (1) y (6), aplicadas al modelo estudiado, nos dan para $r_{ec}^{12} = 110$ mm, los siguientes valores numéricos:

$$(1) \quad \boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} \cong 0,71\,36\,44\,17\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{78.5 \text{ mm}} \quad B \qquad 2$$

$$(6) \quad \boxed{a_{IV}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, r_{ec} \cong 0,57\,73\,50\,26\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{63.5 \text{ m}}$$

$r_{e.s} = 54.0$

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Para la construcción de este modelo son necesarias las siguientes piezas:

A) ARQUIMEDIANO NÚCLEO IV, DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

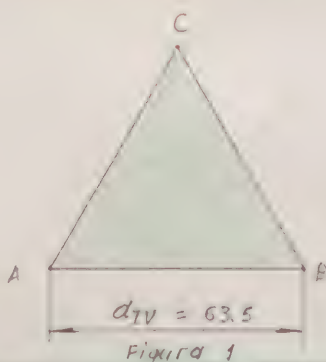


Figura 1

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

E. Álvarez Diciembre 1980

Modelo M-36.5

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

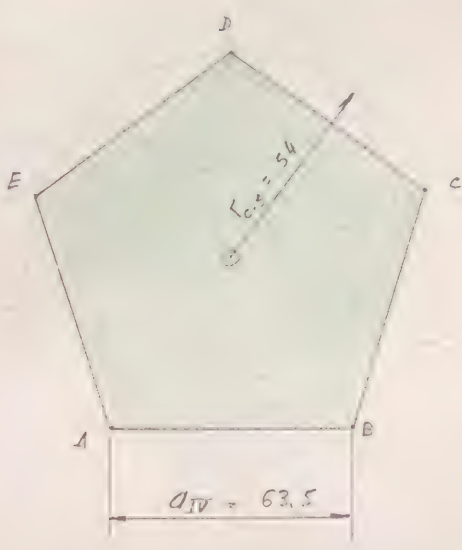


Figura 2

Para mayor exactitud en el trazado de este pentágono regular convexo, calculamos previamente el valor del radio r_{c-5} de su circunferencia circunscrita (ver fórmula (3) G.P. 1400-44).

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_5 \simeq 0{,}85\ 065 \ldots \times 63.5 \simeq 54{,}0 \text{ mm}$$

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2.

PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

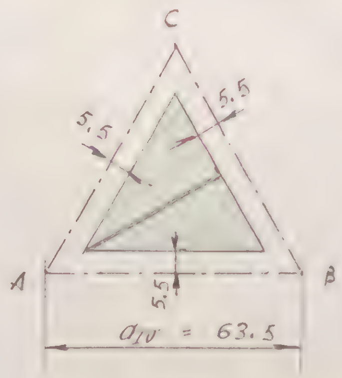


Figura 3

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 20 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular convexo ABCDE de la figura 2, y se detallan en la fig. 4

UNE A4 210 x 297

Alvarez Diciembre 1980

Modelo M - 36.5

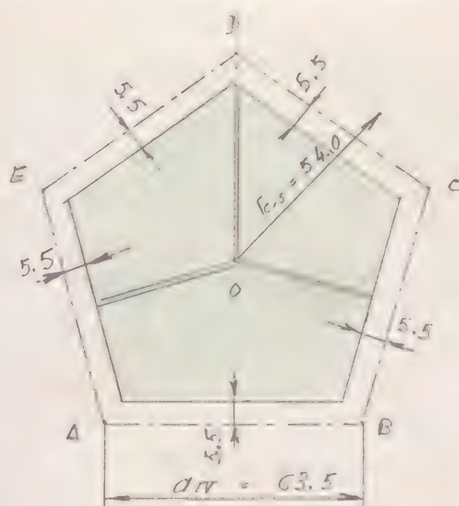


Figura 4

PIEZA Nº 4

12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

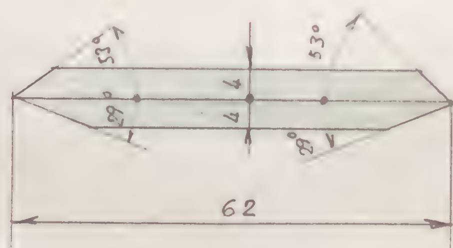


Figura 5

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 40 unidades (simétricas dos a dos)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación en la figura 3.

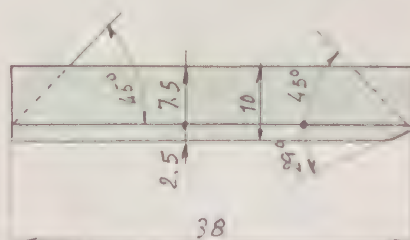


Figura 6

PIEZA Nº 6 40 (U)

Figura 6



		Modelo M-36.5

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES

36 unidades
(simétricas dos a dos)

{ 24 (u) con cotas negras }
{ 12 (u) con cotas rojas }

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación, en la figura 4.

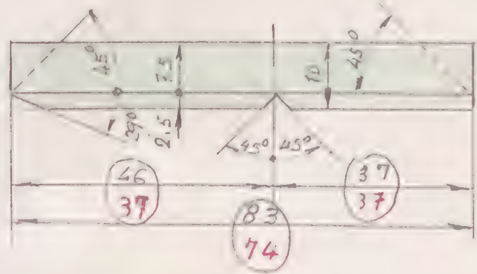


Figura 7

PIEZA Nº 7 36 (u)
(simétricas dos a dos)

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 8.

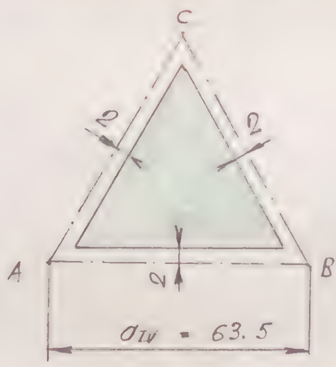


Figura 8

PIEZA Nº 8 20 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES

12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular convexo ABCDE de la figura 2, y se detallan en la figura 9.

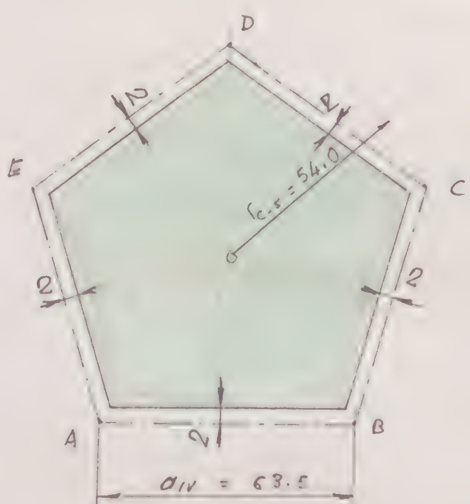


Figura 9

PIEZA Nº 9 12 (u)

Figura 9

UNE A4:210 x 297

Tilleraca Diciembre 1980

B) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

Queda reducido a veinte pirámides pentagonales, rectas y regulares, cuyo desarrollo es el siguiente:

PIEZA Nº 10 DESARROLLO LATERAL DE LAS VEINTE PIRÁMIDES TRUNCADAS 20 unidades

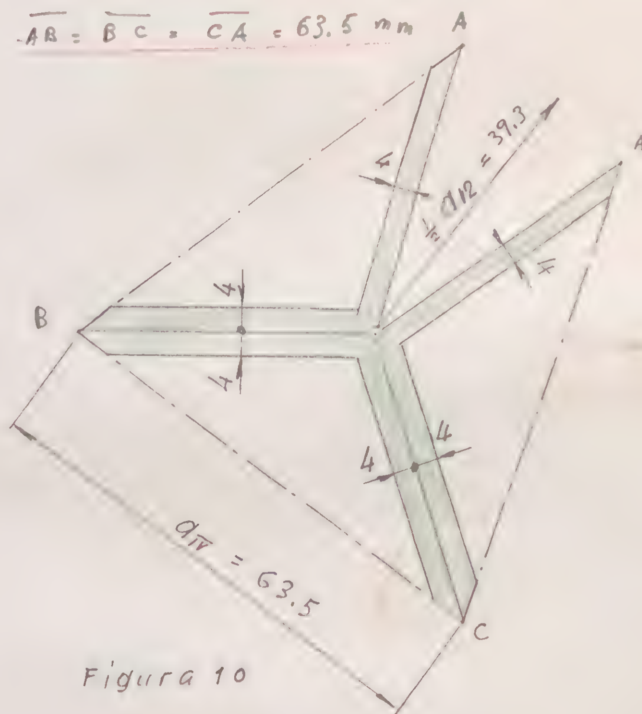


Figura 10

La forma y dimensiones se detallan en la fig. 10

PIEZA Nº 10

20 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 60 unidades

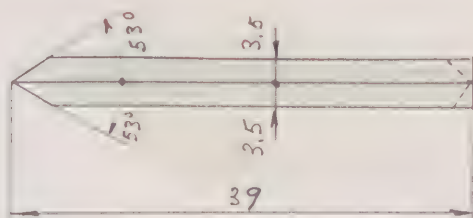


Figura 11

La forma y dimensiones se detallan en la figura 11

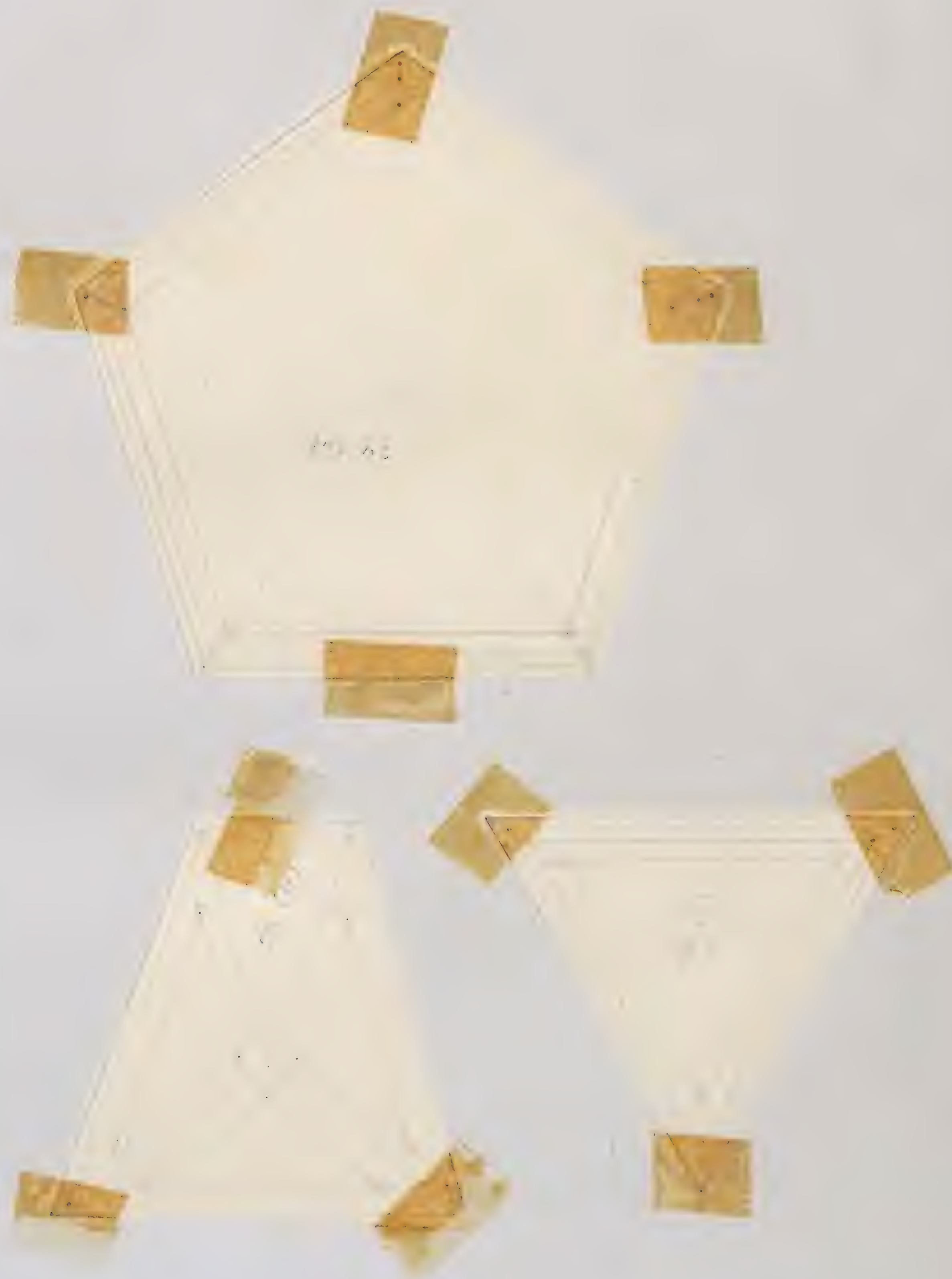
PIEZA Nº 11 60 (u)

Figura 11



MODELO M- 36. 5

Patrones



	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-36.6

EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-36.5, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, DOCE PIRÁMIDES RECTAS, REGULARES, PENTAGONALES, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS PENTAGONALES DEL "ARQUIMEDIANO IV" GENERADO, Y POR VERTICES, LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL DODECAEDRO GENERADOR, DESDE LOS CENTROS DE LAS CARAS PENTAGONALES, DESDE EL CENTRO "O" DEL POLIEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{ec}^{12} = 110$ mm.

UNE A4·210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-36-5, doce pirámides rectas, regulares pentagonales, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras pentagonales del "Arquimediano IV" generado, y por vértices, las proyecciones, sobre la esfera circunscrita al dodecaedro generador, desde los centros de las caras pentagonales, desde el centro del poliedro generador.

Como se deduce de este enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-36.5, al cual ha de añadirsele doce pirámides rectas de base pentagonal regular, y de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación.

La altura "h_5" de dichas pirámides, se obtiene por diferencia del radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita al dodecaedro regular convexo generador, y del radio "r_{ei}^{IV-5}" de la esfera tangente a las caras pentagonales del Arquimediano IV generado. Así pues, será:

$$h_5 = r_{ec}^{12} - r_{ei}^{IV-5} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^{12}, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº.... Lámina 4, en función de la arista "a_{12}" del dodecaedro generador. Su valor es:

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, a_{12} \qquad (2)$$

El radio "r_{ei}^{IV-5}" de la esfera tangente a las caras pentagonales del Arquimediano IV, se obtuvo en el ejercicio G. E. nº.. ...-Lámina 36". Su valor en función de la arista "a_{IV}" de dicho Arquimediano, es

$$r_{ei}^{IV-5} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\, a_{IV} \qquad (3)$$

y sustituyendo a_{IV} por su valor "$\frac{\sqrt{5}+1}{4} a_{12}$" (ver fórmula (5) del ejercicio M- 36.5), tendremos:

$$r_{ei}^{IV-5} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4} a_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4^2}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+1+2\sqrt{5})}{5 \times 4^2}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{5 \times 4^2}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5 \times 4 \times 2}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{5 \times 4 \times 2}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, a_{12} \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_5 = r_{ec}^{12} - r_{ei}^{IV-5} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} a_{12} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, a_{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\right] a_{12} \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor "$a_{12} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}$", en función del radio r_{ec}^{12} de la esfera circunscrita al dodecaedro

UNE A4·210 × 297

Calderer Enero 1981



generador (ver fórmula (1) del modelo M-36.5), tendremos:

$$\boxed{h_5} = \left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\right] \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[\frac{15-3}{12} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\right)^2}\right] r_{ec}^{12} = \left[1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{40 \times 3^2}}\right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(15+3-2\sqrt{45})}{2^2 \times 10 \times 3^2}}\right] r_{ec}^{12} = \left[1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(18-2\times 3\sqrt{5})}{2^2 \times 10 \times 3^2}}\right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{2 \times 10 \times 3}}\right] r_{ec}^{12} = \left[1 - \sqrt{\frac{75+33\sqrt{5}-25\sqrt{5}-55}{60}}\right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[1 - \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{60}}\right] r_{ec}^{12} = \boxed{\left[1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] r_{ec}^{12}} \qquad (6)$$

Para obtener la longitud de la arista "a_5" de las caras laterales de las pirámides pentagonales, tendremos en cuenta que "a_5" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es "h_5" y el otro el radio "r_{c-5}" de la circunferencia circunscrita a la cara pentagonal del Arquimediano IV. Así pues, tendremos

$$a_5 = \sqrt{(h_5)^2 + (r_{c-5})^2} \qquad (7)$$

El radio "r_{c-5}" de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular convexo, en función de su lado "l_5", es (ver fórmula (3) del ejercicio G.P. 1400-44):

Modelo M - 36.6

$$\boxed{r_{e5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \cdot l_5} \qquad (8)$$

En la fórmula (8), aplicada a este estudio, es "$l_5 = a_{5V} = \frac{\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}$" (ver fórmula (6) del modelo M-36.5). Sustituyendo valores, será:

$$\boxed{r_{e5}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5}) \times 3}{90}} r_{ec}^{12} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}} r_{ec}^{12}} \qquad (9)$$

Sustituyendo en (7) los valores (6) y (9), tendremos:

$$\boxed{a_5} = \sqrt{\left[\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) r_{ec}^{12}\right]^2 + \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}} r_{ec}^{12}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{30}} r_{ec}^{12} = \sqrt{1+\frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5+\sqrt{5}}{30}} r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{30}{30} + \frac{10+4\sqrt{5}}{30} + \frac{5+\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{15}}} r_{ec}^{12} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{45+5\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{15}}} r_{ec}^{12}} \qquad (10)$$

Las fórmulas "$a_{1V} = \frac{\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}$" (fórmula (6) del modelo M-36.5) y la nº (10) de este modelo, nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides pentagonales que se adicionan al modelo M-36.5, para obtener el que se estudia.

UNE A4 210 x 297

Calvarao Enero 1981

Para este caso particular, es $r_{ec}^{12} = 110$ mm, y por consiguiente,

$$\boxed{a_{IV}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} \cong 0,57\,73\,50\,26\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{63,5 \text{ mm}}$$

$$\boxed{a_5} = \sqrt{\frac{45+5\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12} \cong 0,53\,23\,24\,19\,8\ldots \times 110 \cong \boxed{58,6 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO IV; OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA $x = \frac{1}{2}\, a_{12}$

Piezas 1 al 11, iguales a las del modelo M-36.5

B) PIRÁMIDES RECTAS, PENTAGONALES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO M-36.5

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 1

UNE A4 210 x 297

Calvarez Enero 1981

Modelo M-36.6

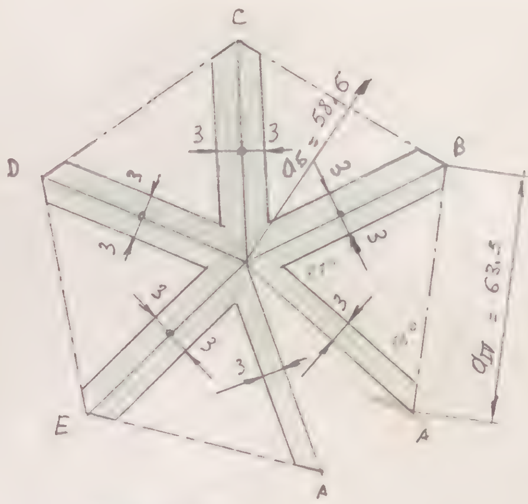


Figura 1

AB = BC = CD = DE = EA = 63.5 mm

PIEZA Nº 12

12(u)

Figura 1

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

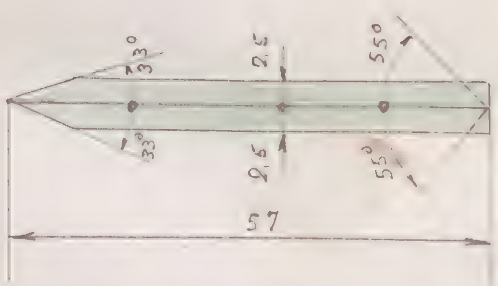


Figura 2

PIEZA Nº 13

60 (u)

Figura 2

MODELO M-36.6 PATRONES



MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO IV" OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_{20}", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA "$\frac{1}{2}\,a_{20}$".- EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL ICOSAEDRO REGULAR GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 36.7

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO IV", obtenido por truncadura de vértices de un icosaedro regular convexo, de arista "a_{20}", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, la distancia "$x = \frac{1}{2} a_{20}$". El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el icosaedro regular generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{20} = radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

Teniendo presente lo expuesto en las CONSIDERACIONES PREVIAS del modelo M-40.5, en las que se destaca el proceso geométrico denominado TRUNCADURA DE VÉRTICES de los cinco poliedros regulares convexos, y por el que se obtiene muchos de los POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, entre los que se encuentra el ARQUIMEDIANO IV de este ejercicio, podemos establecer de inmediato las siguientes propiedades del poliedro nuclear que se obtiene por truncadura de vértices del icosaedro regular convexo, a la distancia "$x = \frac{1}{2} a_{20}$". El valor de "x" se obtiene por las condiciones geométricas siguientes, cuando el plano secante produzca:

UNE A4 210 x 297

a) En las caras del icosaedro generador, polígonos regulares convexos de igual (o doble) número de lados que los de las mencionadas caras (en este caso particular, estos polígonos serán triángulos equiláteros, cuyos vértices son los centros de los lados de las caras del icosaedro).

b) En los ángulos sólidos de los vértices, polígonos regulares convexos de tantos lados como caras concurran en los vértices (en este caso particular, serán "pentágonos regulares").

Así pues: Por la condición a), el poliedro núcleo tendrá veinte caras triangulares equiláteras, C_3 sobre las caras del icosaedro generador, y

Por la condición b), tendrá también doce caras pentagonales regulares C_5, sobre el plano secante.

Consecuentemente, el poliedro núcleo resultante de esta truncadura de vértices, tendrá las siguientes características geométricas que detallamos en el cuadro siguiente:

1) Número de caras triangulares regulares = $20\ C_3$

2) Número de caras pentagonales regulares = $12\ C_5$

3) Número de vértices: $\frac{20 \times 3 + 12 \times 5}{4}$ = $30\ V$

(sigue en hoja 3)

Calvarez Marzo 1982



4) Número de aristas $= \frac{20 \times 3 + 12 \times 5}{2} = \qquad = 60\ A$

5) Número de caras en cada vértice $= 2\ C_3 + 2\ C_5$

A la vista de los resultados anteriores, se deduce que el poliedro núcleo convexo, resultante de la truncadura de vértices del icosaedro regular convexo, es un ARQUIMEDIANO IV, estudiado en el ejercicio G.E. nº ---- Lámina 4.

Las conclusiones anteriores justifican el enunciado de este ejercicio.

CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

Previamente a la construcción de este modelo, calcularemos, en función de r_{ec}^{20} (dato de este ejercicio), las siguientes magnitudes:

1) Arista "a_{20}" del icosaedro generador

Se deduce de la fórmula " $r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a_{20}$ " obtenida en el ejercicio G.E. nº ---- Lámina 5; despejando en ella "a_{20}", tendremos:

$$\boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4} = \frac{4}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} r_{ec}^{20} = \frac{4\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2(5+\sqrt{5})} r_{ec}^{20} = 2\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})^2}} r_{ec}^{20}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = 2\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{20}} r_{ec}^{20} = \boxed{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20}}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \qquad (1)$$

2) Distancia "x" en la que la truncadura de vértices del icosaedro regular convexo, produce el ARQUIMEDIANO IV

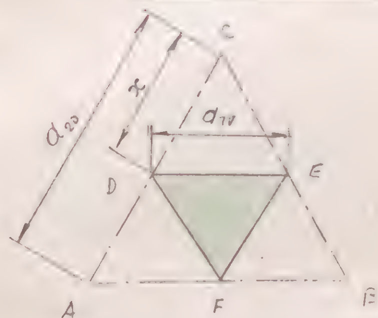


Figura 1

Sea (fig. 1) ABC una cara del icosaedro generador de arista $\overline{AC} = a_{20}$. Uniendo los puntos medios de los lados de dicha cara, se nos formará el triángulo DEF que es regular, por lo que será $\overline{CD} = \overline{DE} = \frac{1}{2}\,\overline{CA}$. De donde se deduce que

$x = a_{IV} = \frac{1}{2}\,a_{20}$ que nos da el valor de la distancia de la truncadura de vértices del icosaedro generador, lo que justifica el enunciado.

El valor de "x" en función de r_{ec}^{20}, será pues, sustituyendo el de (1)

$$x = \frac{1}{2}\,a_{20} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \qquad (2)$$

Su valor numérico para $r_{ec}^{20} = 110$, será el siguiente:

$$x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \simeq 0{,}52\,57\,31\,11\,2\ldots \times 110 \simeq 57{,}9 \text{ mm}$$

---

3) Arista "a_{IV}" del ARQUIMEDIANO IV

Es igual a la distancia "x"

$$\boxed{a_{IV}} = x = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20}} \qquad (3)$$

Las fórmulas (1) y (3), aplicadas al modelo estudiado, tienen los siguientes valores numéricos:

$$\boxed{a_{20}} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} = 1{,}05\;14\;62\;22\;4\ldots \times 110 \cong \boxed{115{,}7 \text{ mm}} \qquad (1)$$

$$\boxed{a_{IV}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \cong 0{,}52\;57\;31\;11\;2\ldots \times 110 \cong \boxed{57{,}9 \text{ mm}}$$

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) ARQUIMEDIANO NÚCLEO IV DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

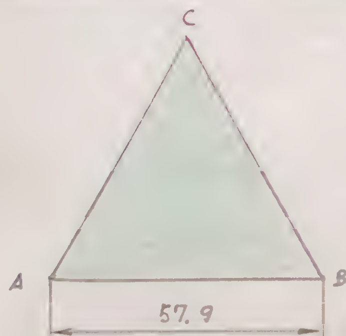


Figura 2

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

UNE A4 210 x 297

Modelo M-36.7

PIEZA Nº 2 — CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

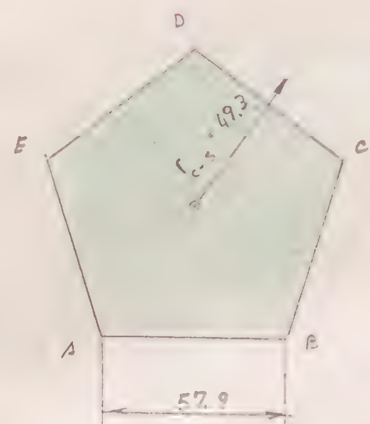


Figura 3

Radio de la circunferencia circunscrita al pentagono: $r_{c\text{-}5} = 0.8507 \times 57.9 = 49.3$ mm

PIEZA Nº 2 — 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 3 — REFUERZO NORMAL INTERIOR EN CARAS PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

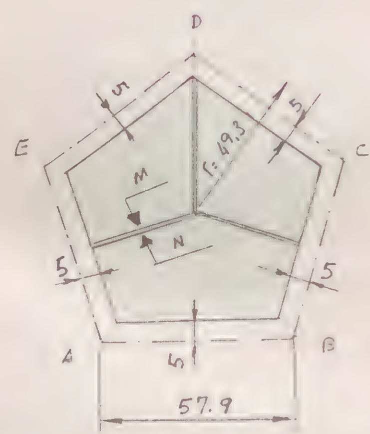


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 3 — 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 4 — REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR.- TIPO N

24 unidades

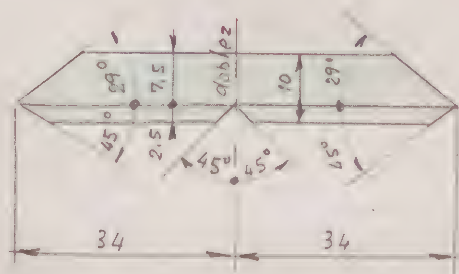


Figura 5

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación en la figura 4

PIEZA Nº 4 — 24 (u)

Figura 5

UNE A4 210 x 297

Marzo 1982

Modelo M-36.7

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR.- TIPO M

24 unidades (simétricas 2 a 2)

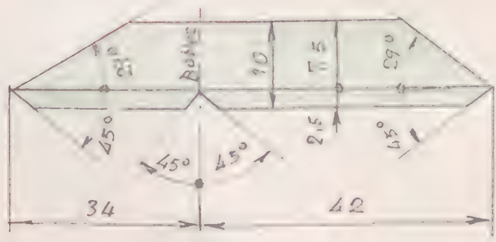


Figura 6

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación, en la figura 4

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL INTERIOR EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

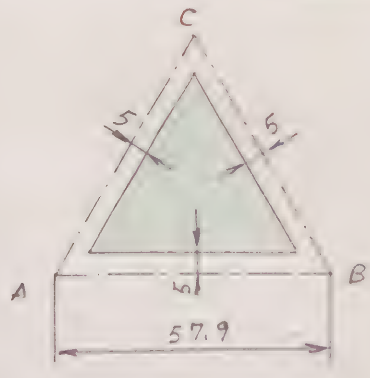


Figura 7

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 2, y se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 7 20 (u)

Figura 7

UNE A4 210 x 297

Marzo 1982

Modelo M-36.7

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 60 unidades

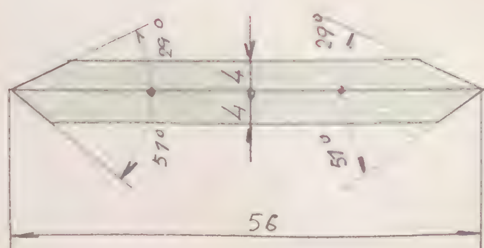


Figura 8

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 8 60 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

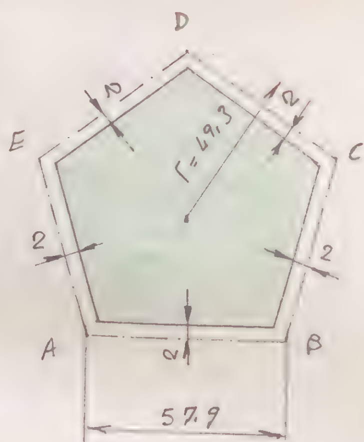


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 9 12 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

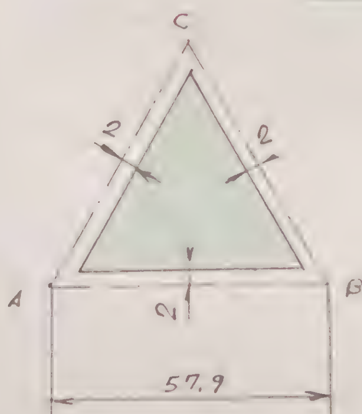


Figura 10

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 2, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 10 20 (u)

Figura 11

UNE A4 210 x 297

Marzo 1982

		Modelo M- 36.7

B) ICOSAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 10 PIRÁMIDES APARENTES SOBRE LAS CARAS PENTAGONALES REGULARES DEL ARQUIMEDIANO, DE CARAS VACIADAS. 12 unidades

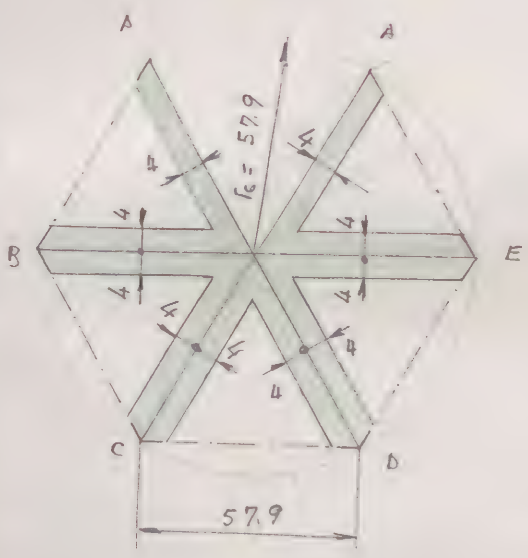


Figura 11

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 10

12 (u)

Figura 11

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES ANTERIORES. 60 unidades

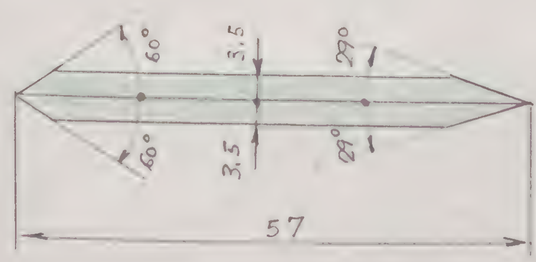


Figura 12

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

PIEZA Nº 11

60 (u)

Figura 12

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO V", FORMADO POR OHO CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3) Y DIEZ Y OCHO CARAS CUADRADAS (C_4), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1\ C_3 + 3\ C_4$

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{ec}^{V} = 110$ mm.

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 37.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO V", formado por ocho caras triangulares regulares (C_3) y dieciocho caras cuadradas (C_4), concurriendo en cada vértice $1\,C_3 + 3\,C_4$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G.E. nº... Lámina 37, y representado en sus vistas principal, superior y lateral izquierda en la mencionada Lámina 37, a escala 1:1, con el radio r_{ec}^{V} de su esfera circunscrita, de $r_{ec}^{V} = 55$ mm.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita

$$r_{ec}^{V} = 110 \text{ mm}$$

Las características geométricas del ARQUIMEDIANO V, son las siguientes:

Número de caras triangulares regulares	$C_3 = 8$
Número de caras cuadradas ------------	$C_4 = 18$
Número de vértices $= \dfrac{8 \times 3 + 18 \times 4}{4} =$ ----------	$V = 24$
Número de aristas $= \dfrac{8 \times 3 + 18 \times 4}{2} =$ ----------	$A = 48$
Número de caras en cada vértice -------	$1C_3 + 3C_4$

UNE A4 210 x 297

Caldares Enero 1982

Para obtener el despiezo de este poliedro calcularemos previamente la longitud "a^{∇}" de la arista del mismo, en función del radio "r_{ec}^{∇}" de su esfera circunscrita.

Su valor se deduce de la fórmula $r_{ec}^{\nabla} = \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\; a^{\nabla}$ obtenida en el mencionado ejercicio G.E. nº ... Lámina 37.

Despejando en ella a^{∇}, tendremos:

$$\boxed{a^{\nabla}} = r_{ec}^{\nabla} : \frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}\, r_{ec}^{\nabla} = \sqrt{\frac{4}{5+2\sqrt{2}}}\; r_{ec}^{\nabla} = \sqrt{\frac{4\times(5-2\sqrt{2})}{25-8}}\; r_{ec}^{\nabla} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{20-8\sqrt{2}}{17}}\; r_{ec}^{\nabla}}$$

En el caso estudiado, su valor numérico será:

$$\boxed{a^{\nabla}} = \sqrt{\frac{20-8\sqrt{2}}{17}} \times 110 \cong 0{,}71\,48\,13\,48\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{78{,}6 \text{ mm}}$$

Esta sola magnitud nos permite la construcción del poliedro estudiado, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

8 unidades

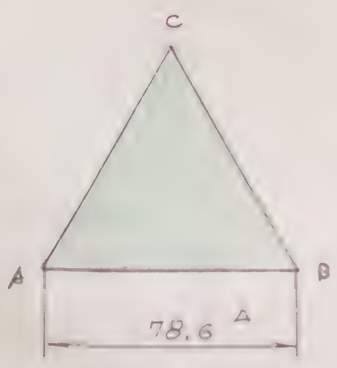


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 8 (u)

Figura 1

		Modelo M-37.1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS 18 unidades

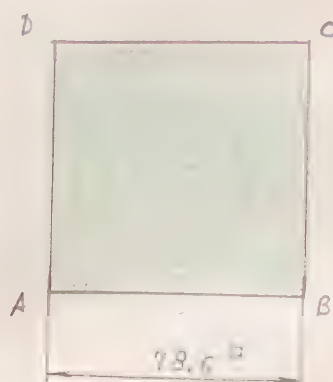


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 18 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

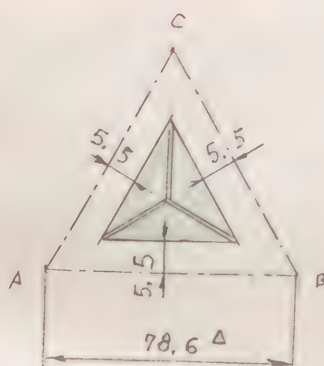


Figura 3

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 8 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR EN CARAS CUADRADAS 18 unidades

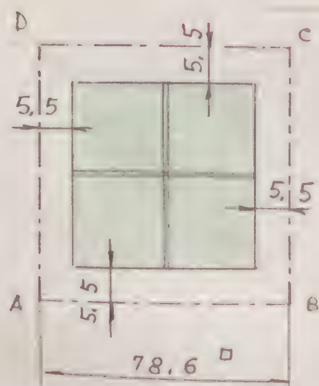


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 4.

PIEZA Nº 4 18 (u)

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Tavares Enero 1982



PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA CUADRADA 24 unidades

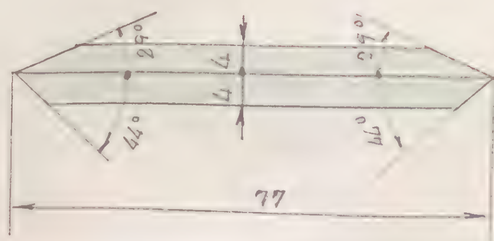


Figura 5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS CUADRADAS 24 unidades

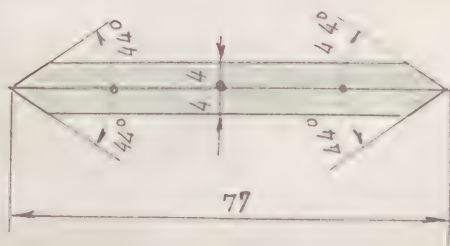


Figura 6

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6.

PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 24 unidades

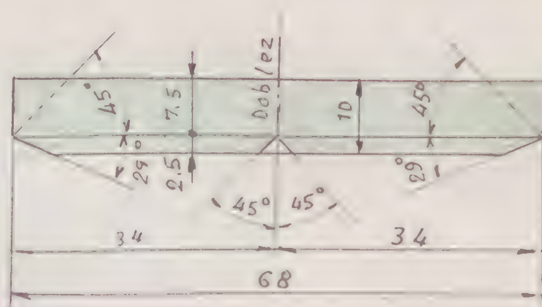


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 3.

PIEZA Nº 7 24 (u)

Figura 7

Modelo M - 37.1

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR EN LAS CARAS CUADRADAS

72 unidades

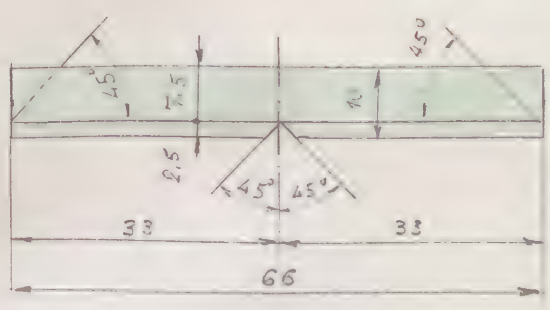


Figura 8

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación en la figura 4.

PIEZA Nº 8 72 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

8 unidades

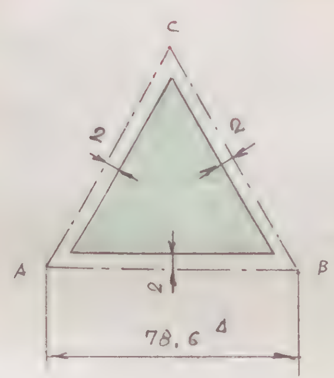


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen del triángulo ABC de la figura 4, y se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 9 8 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

18 unidades

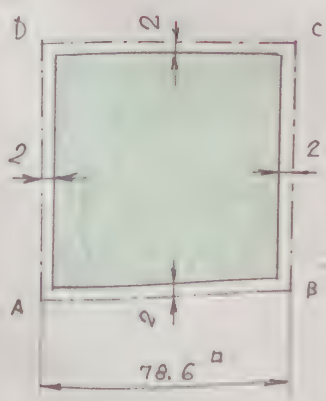


Figura 10

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 10 18 (u)

Figura 10

UNE A4 210 x 297

Tavarez Enero 1982

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS "ARQUIMEDIANO V", FORMADO POR OCHO CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3) Y DIEZ Y OCHO CARAS CUADRADAS (C_4), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1C_3 + 3C_4$.

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{ec}^{V} = 110$ mm

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO V", formado por ocho caras triangulares regulares (C_3) y diez y ocho caras cuadradas (C_4), concurriendo en cada vértice $1\,C_3 - 3\,C_4$.

Este modelo, puede considerarse como una variante del M - 37.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M - 37.1.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{V} = Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{V} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este poliedro, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES. 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1



Modelo M-37.2

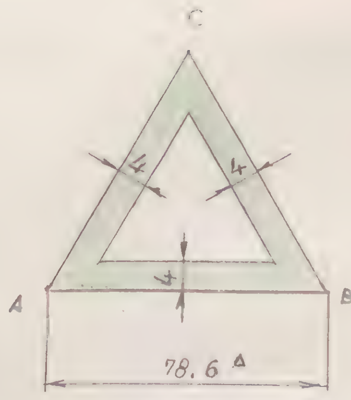


Figura 1

PIEZA N 1

8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS 18 unidades

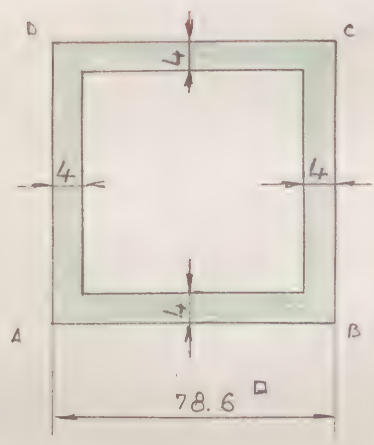


Figura 2

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 18 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA CUADRADA 24 unidades.

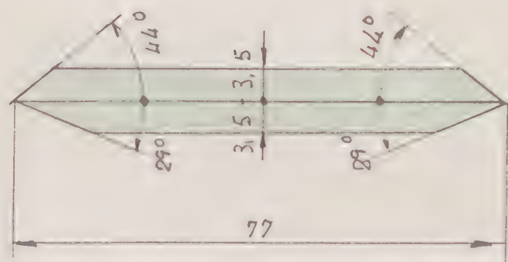


Figura 3

PIEZA Nº 3

24 (u)

Figura 3

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

Modelo M-37.c

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS CUADRADAS

24 unidades.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

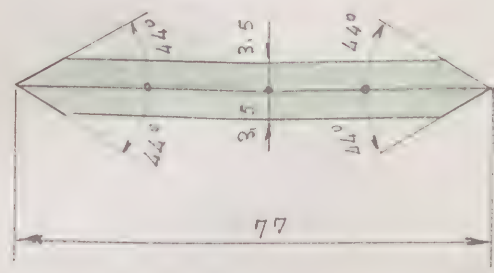


Figura 4

PIEZA Nº 4

24 (u)

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1982

VARIANTE DEL MODELO M - 37.1, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{T} = 76.1 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297

Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 37.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO V", formado por ocho caras triangulares regulares (C_3) y diez y ocho caras cuadradas (C_4), concurriendo en cada vértice $1\,C_3 + 3\,C_4$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M - 37.1, de igual forma, pero siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{e_c}^{V} = 76.1$ mm).

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M - 37.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción "k= 76.1 : 110" o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{e_c}^{V} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

[illegible] Enero 1982

		Modelo M-37.3

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-37.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-37.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1 8 (u)	78.6	54.4

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS 18 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 2 18 (u)	78.6	54.4

Modelo M - 37.3

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 8 (u)	78.6	54.4
	5.5	5,0

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS 18 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4 18 (u)	78.6	54.4
	5.5	5.0

PIEZA Nº 5 UNIONES DE ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA CUADRADA 24 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1982

		Modelo M-37.3

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 5	77	53
24(u)	4	4
	29°	29°
	44°	44°

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS CUADRADAS

24 unidades

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 6	77	53
24 (u)	4	4
	29°	29°
	44°	44°

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 16 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la fig. 1

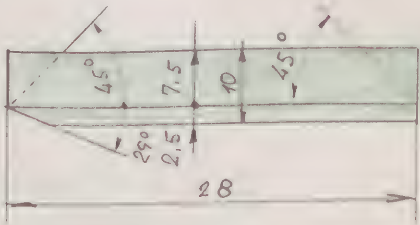


Figura 1

PIEZA Nº 7 16 (u)

Figura 1

UNE A4 210 x 297

Enero 1982

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS 36 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

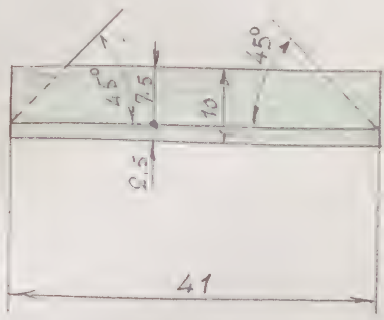


Figura 2

PIEZA Nº 8

36 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

8 unidades

La figura 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas
Pieza nº 9	78.6	54.4
8 (u)	2.0	2.0

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

18 unidades

La figura 10, se construirá con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 10	Longitudes mm	Cotas modificadas m/m
Pieza nº 10	78.6	54.4
18 (u)	2.0	2.0

UNE A4 210 x 297

Enero 1982

VARIANTE DEL MODELO M - 37.2 DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{V_s} = 76,1 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO V", formado por ocho caras triangulares (C_3) y diez y ocho caras cuadradas (C_4), concurriendo en cada vértice $1\ C_3 + 3\ C_4$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-37.2 de igual forma, pero siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{V} = 76.1$ mm).

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M-37.2, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{e_c}^{V} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Enero 19[illegible]

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-37.2, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-37.4, en la que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES
8 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1	78.6	54,4
8 (u)	4.0	3

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS 18 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas
Pieza nº 2	78.6	54.4
18 (u)	4	3

Modelo M- 37.4

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA CUADRADA 24 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3	77	53
24 (u)	3,5	2,5
	29º	29º
	44º	44º

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS CUADRADAS

24 unidades

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4	77	53
	3,5	2,5
	44º	44º

La figura 4, ha de construirse con las anteriores cotas modificadas



UNE A4 210 x 297

[signature] Enero 1982

EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO V", OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO DE ARISTA "a_6", A LA DISTANCIA $y = \frac{2-\sqrt{2}}{2} a_6$, SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE VÉRTICES (O VICEVERSA) A LA DISTANCIA $x = (2-\sqrt{2})\,a_6$, AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LAS DISTANCIAS "y" y "x" RESPECTIVAMENTE. EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL EXAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$$r_{oe}^{6} = 110 \text{ mm}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-37.5

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO V" obtenido por "truncadura paralela de aristas" de un exaedro regular convexo de arista "a_6", a la distancia $y = \frac{2-\sqrt{2}}{2} a_6$, seguida de una "truncadura vértices" (o viceversa), a la distancia $x = (2-\sqrt{2})\, a_6$, al tomar sobre cada arista y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente. El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el exaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{6} = Radio de la esfera circunscrita al exaedro regular generador:

$$r_{ec}^{6} = 110 \text{ mm}$$

1.) GENERALIDADES

En el ESTUDIO PREVIO realizado en el modelo M-35.10, desarrollamos el proceso geométrico denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de un poliedro regular convexo, que aplicaremos seguidamente a éste ejercicio.

Dicho proceso da lugar a la formación, en cada poliedro regular generador, de un poliedro núcleo, convexo, cuyas, ca-

UNE A4 210 x 297

Modelo M-37.5

racterísticas geométricas detallamos en su párrafo 2, y que en particular, y en el caso especial descrito en este enunciado, dicho poliedro es un <u>ARQUIMEDIANO</u>

Las características geométricas del poliedro núcleo obtenido en este ejercicio, se deducen previamente de las generales detalladas en el mencionado EJERCIO PREVIO, y son las siguientes:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas, producen en el caso del exaedro regular, 6 cuadrados situados en las caras del exaedro generador.

b) Los planos secantes "π_2" de la truncadura de vértices producen a su vez 8 triángulos equiláteros (uno en cada vértice), situados en el plano secante "π_2".

c) Los planos secantes "π_1" y "π_2" al cortarse mutuamente producen a su vez 12 cuadrados iguales a los a) (uno por cada arista del exaedro), paralelos a las aristas del poliedro generador.

Por consiguiente, el poliedro núcleo estará limitado por <u>DIEZ Y OCHO CARAS CUADRADAS</u> y <u>OCHO TRIANGULARES EQUILÁTERAS</u>.

Estas son las características geométricas del ARQUIMEDIANO V, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 37, que detallamos a continuación:

Tavares Dbre. 1981

ARQUIMEDIANO V

Número de caras triangulares ...	$C_3 = 8$
Número de caras cuadradas	$C_4 = 18$
Número de vértices	$V = 24$
Número de aristas	$A = 48$
Número de caras en cada vértice	$1C_3 + 3C_4$

2). POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1" de la "truncadura paralela de aristas" y de los "π_2" de la "truncadura de vértices", con respecto al poliedro regular generador, se obtiene mediante las respectivas distancias "y" y "x", tomadas sobre las aristas y a partir de los vértices.

Para que el poliedro núcleo sea un Arquimediano, se han obtenido en el EJERCIO PREVIO al modelo M-35.10, fórmulas generales (fórmula (3), párrafo 4.3, para la determinación de "x", y (fórmula (2), párrafo 4.2, para la de "y"), que aplicamos a este ejercicio.

2.1) Distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la truncadura paralela de aristas.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro ge-

nerador, de la fórmula general (2), deducida en M-35.10

$$y = \frac{tg\,\frac{\alpha}{2}}{2\,(\cos\beta + 1)\,(sen\,\varphi + tg\,\frac{\alpha}{2})}\,a_n \qquad (2)$$

En ella, sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al exaedro regular convexo generador.

a) n = Número de caras del exaedro = 6

b) a_n = Arista del exaedro = a_6

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360^\circ}{4} : 2 = 45^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del exaedro.

e) β = Ángulo interno que forman dos lados consecutivos del polígono regular de una cara superficial = $\frac{180^\circ \times (4-2)}{4} = 90^\circ$

f) $\cos\beta = \cos 90^\circ = 1$

g) $tg\,\frac{\alpha}{2} = tg\,45^\circ = 1$ (Ver ejercicio G. P. 1006)

h) $sen\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Ver ejercicio G.P. nº---- Lámina 2).

Aplicando estos valores en la fórmula 2, tendremos:

$$\boxed{y} = \frac{1}{2 \times (1+1) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}\, a_6 = \frac{1}{2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}\, a_6 = \frac{a_n}{2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)}\, a_6 =$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{2}}\, a_6 = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\, a_6}$$

Este valor de "y" justifica el expresado en el enunciado de este ejercicio.

Puede obtenerse también en función de r_{ec}^{6} (dato de este modelo), sustituyendo $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{6}$, valor que obtendremos posteriormente. Así pues será:

$$\boxed{y} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\, a_6 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{6} = \frac{(2-\sqrt{2}) \times \sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{6} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^{6}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{y} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^{6} \cong 0{,}33\,82\,03\,95\,8\ldots \times 110 \cong \boxed{37{,}2 \text{ mm}}$$

2,2) Distancia "x" que fija la posición del plano "π_2" en la truncadura de vértices.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro generador, de la fórmula (3) deducida en M-35.10

$$x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)}\, a_n \qquad (3)$$

En ella, sustituiremos los valores generales de sus variables,

		Modelo M-37.5

por los particulares siguientes, correspondientes al exaedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del exaedro = 6

b) a_n = Arista del exaedro = a_6

c) $\frac{\alpha}{2}$: Semiángulo central del polígono regular de una cara $= \frac{360^\circ}{4} : 2 = 45^\circ$

d) β = Ángulo interno que forman dos lados consecutivos del polígono regular de una cara superficial $= \frac{180^\circ \times (4-2)}{4} = 90^\circ$

e) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del exaedro.

f) $\cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

g) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

h) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Ver ejercicio G.P. nº... Lámina 2).

Aplicando estos valores en la fórmula 3), tendremos:

$$\boxed{x} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)} a_6 = \frac{1}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} a_6 = \frac{2}{2+\sqrt{2}} a_6 = \frac{2\,(2-\sqrt{2})}{2} a_6 =$$

$$= \boxed{(2-\sqrt{2})\, a_6}$$

Este valor de "x" justifica el expresado en el enunciado de este ejercicio.

[signature] Dbre. 1981

UNE A4 210 x 297

Puede obtenerse también en función de r_{ec}^6 (dato de este ejercicio), sustituyendo $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6$, (valor que obtendremos posteriormente). Así pues, será:

$$\boxed{x} = (2-\sqrt{2})\, a_6 = (2-\sqrt{2}) \times \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6 = \boxed{\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^6}$$

Su valor numérico será el siguiente:

$$\boxed{x} = \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^6 \cong 0,676407915... \times 110 \cong \boxed{74.4 \text{ mm}}$$

---

3) CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo son necesarias las siguientes piezas:

3.1) EXAEDRO REGULAR GENERADOR, DE CARAS VACIADAS.

3.11 Arista "a_6", en función de r_{ec}^6

Su valor se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$" deducida el ejercicio G.E. nº... Lámina 2.- Despejando en ella "a_6", tendremos:

$$\boxed{a_6} = r_{ec}^6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} r_{ec}^6 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6}$$

Valor que hemos aplicado en los párrafos 2.1 y 2.2

		Modelo M-37.5

Su valor numérico, será pues:

$$\boxed{a_6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{0e}^{6} \cong 1.15\,47\,00\,53\,7\ldots \times 110 \cong \boxed{127.0 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura 1 del ejercicio M-2.102.

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura 2 del ejercicio M-2.102.

3.2) ARQUIMEDIANO V (NÚCLEO DEL EXAEDRO GENERADOR), DE CARAS MACIZAS, INCLUIDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL EXAEDRO GENERADOR A LAS CARAS TRIANGULARES DEL ARQUIMEDIANO V.

3.21) Longitud "a_V^6" de la arista del Arquimediano V engendrado por el exaedro regular "P_6"

Se obtiene, en función de la arista "a_6" del exaedro generador, de la fórmula (1), deducida en el modelo M-35.10

Alvarez Dbre. 1981

UNE A4 210 x 297

$$a_A = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \, a_n \qquad (1)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al exaedro regular convexo generador.

a) $a_n = a_6$ = Arista del exaedro generador.

b) $a_A = a_v^6$ = Arista del Arquimediano generado.

c) $\frac{\alpha}{2}$: Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial $= \frac{360^\circ}{4} : 2 = 45^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del exaedro

e) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ (Ver ejercicio G. P. 1006)

f) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Ver ejercicio G. P. ... Lámina 2)

Aplicando estos valores a la fórmula (1), tendremos:

$$\boxed{a_v^6} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \, a_6 = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \, a_6 = \frac{\sqrt{2}\,(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} \, a_6 = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} \, a_6 =$$

$$= \boxed{(\sqrt{2} - 1) \; a_6}$$

Puede obtenerse "a_v^6" en función de r_{ec}^6 (dato de este modelo, sustituyendo $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6$, valor obtenido en el párrafo 3.11 de este ejercicio. Así pues, será:

Talavera Dbre. 1981

		Modelo M-37.5

$$\boxed{a_v^6} = (\sqrt{2}-1)\, a_6 = (\sqrt{2}-1) \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ee}^6 = \boxed{\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}\, r_{ee}^6}$$

El valor numérico de la arista a_v^6, se obtiene de la fórmula anterior:

$$\boxed{a_v^6} = \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3} \times 110 \cong 0.47\,82\,92\,62\,3\ldots \times 110 \cong \boxed{52.6 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES

8 unidades

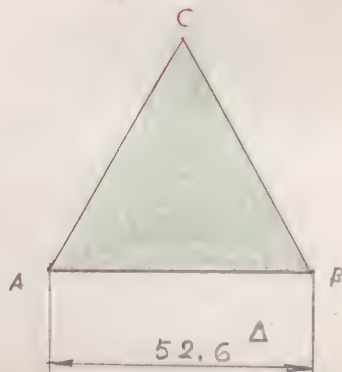


Figura 1

La forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 3. 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 18 unidades

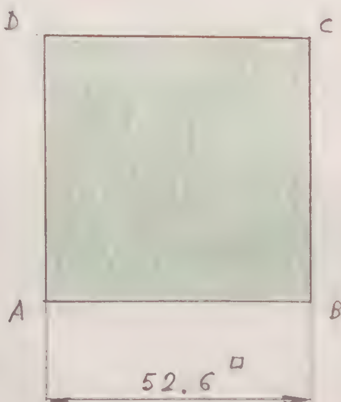


Figura 2

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 4 18 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES

8 unidades

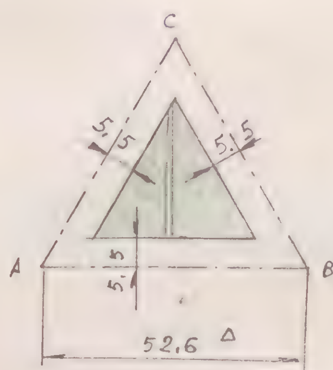


Figura 3

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 5 8 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

18 unidades

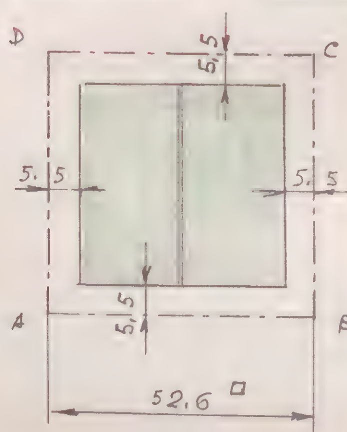


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 6 18 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 16 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación, en la figura 3

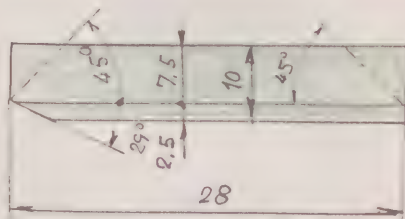


Figura 5

PIEZA Nº 7 16 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS CUADRADAS

36 unidades

Tavares Dbre. 1981

		Modelo M-37.5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación, en la figura 4.

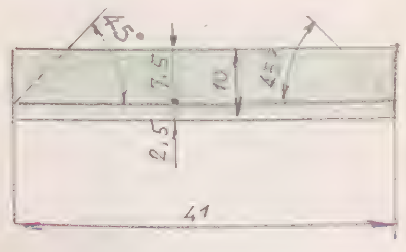


Figura 6

PIEZA Nº 8 36 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

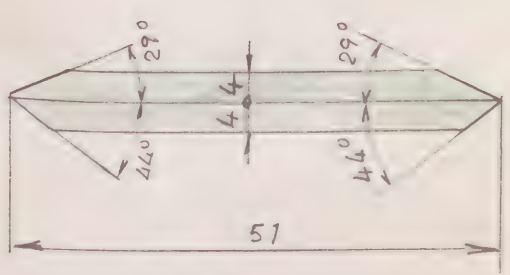


Figura 7

PIEZA Nº 9 48 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

8 unidades

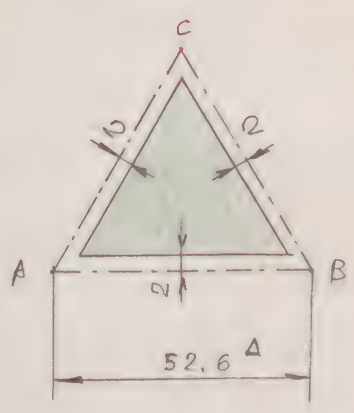


Figura 8

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 10

8 (u)

Figura 8

Dbre. 1971

PIEZA Nº 11 · FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

18 unidades

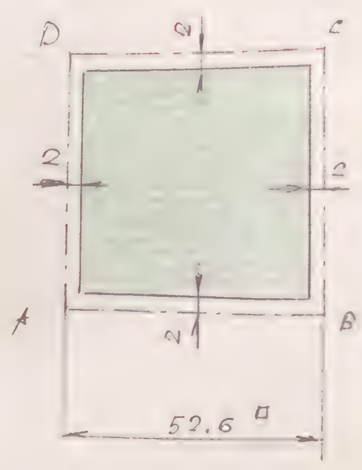


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 11 18 (u)

Figura 9

---

3. 22) Arista lateral "a_l" de las pirámides auxiliares triangulares que fijan la posición de los vértices del exaedro generador con respecto al Arquimediano V.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del exaedro generador, de la fórmula (4) deducida en el modelo M - 35,10

$$a_l = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}\, a_n \qquad (4)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al exaedro regular generador:

a) "a_n" = a_6 = Arista del exaedro.

b) "a_l" = a_3^{∇} = Arista lateral de la pirámide triangular

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360°}{4} : 2 = 45°$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del exaedro.

e) β = Angulo interior que forman dos lados consecutivos del polígono regular de una cara superficial =

$$= \frac{180° \cdot (4-2)}{4} = 90°$$

f) $\cos \frac{\beta}{2} = \cos \frac{90°}{2} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

g) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 45° = 1$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

h) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Ver ejercicio G.P. nº ---- Lámina 2)

Aplicando estos valores a la fórmula (4), tendremos:

$$\boxed{a_3^V} = \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)} a_6 = \frac{1}{\sqrt{2} \times \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)} a_6 = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}+2}{2}} a_6 =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}+2} a_6 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} a_6 = \frac{\sqrt{2}-1}{1} a_6 = \boxed{(\sqrt{2}-1)\ a_6}$$

Puede obtenerse "a_3^V" en función de r_{ec}^6 (dato de este modelo), sustituyendo $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6$, valor obtenido en el párrafo 3.11 de este ejercicio. Así pues será:

$$\boxed{a_3^V} = (\sqrt{2}-1)\ a_6 = (\sqrt{2}-1) \times \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6 = \boxed{\frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_3^V} = \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{3} \times 110 = 0,47\ 82\ 92\ 62\ 3 \ldots \times 110 \cong \boxed{52,6 \text{ mm}}$$

UNE A4·210 x 297

[illegible] Dic. 1981

Modelo M-37.5

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES TRIANGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

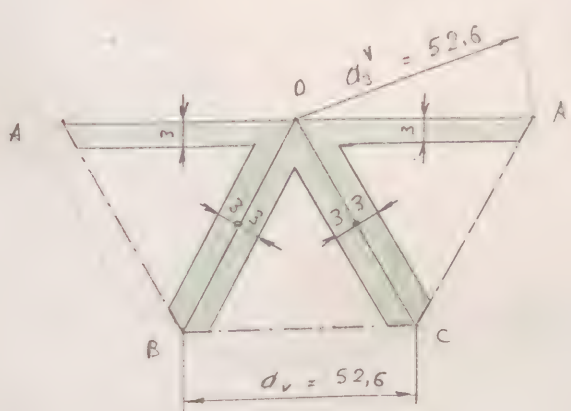


Figura 10

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 52{,}6$ mm

PIEZA Nº 12 8 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES TRIANGULARES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

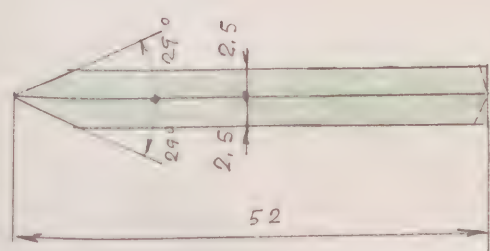


Figura 11

PIEZA Nº 13 24 (u)

Figura 11

UNE A4 210 x 297

Dbre, 1981

MODELO M - 37.5

Patrones







MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO V", OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_8", A LA DISTANCIA $y = \frac{3-\sqrt{2}}{7} a_8$, SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE VÉRTICES (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA $x = \frac{6-2\sqrt{2}}{7} a_8$, AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LAS DISTANCIAS "y" Y "x" RESPECTIVAMENTE. - EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO V" obtenido por "truncadura paralela de aristas" de un octaedro regular convexo, de arista "a_8", a la distancia $y = \frac{3-\sqrt{2}}{7}\, a_8$, seguida de una "truncadura de vértices" (o viceversa), a la distancia $x = \frac{6-2\sqrt{2}}{7}\, a_8$, al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente.- El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el octaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{6} = Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

En el ESTUDIO PREVIO realizado en el modelo M-35.10, desarrollamos el proceso geométrico denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de un poliedro regular convexo, que aplicaremos seguidamente a este ejercicio.

Dicho proceso da lugar a la formación, en cada poliedro regular generador, de un poliedro núcleo, convexo, cuyas características geométricas detallamos en el párrafo 2. y que en

en particular, y en el caso especial descrito en este enuncia-do, dicho poliedro es un ARQUIMEDIANO

Las características geométricas del poliedro núcleo obtenido en este ejercicio, se deducen previamente de las generales detalladas en el mencionado EJERCICIO PREVIO, y son las siguientes:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas, producen en el caso del octaedro regular, ocho triángulos equiláteros situados en las caras del octaedro generador.

b) Los planos secantes "π_2" de la truncadura de vértices producen a su vez, seis cuadrados (uno en cada vértice), situados en el plano secante "π_2".

c) Los planos secantes "π_1" y "π_2" al cortarse mutuamente producen a su vez doce cuadrados iguales a los b) (uno por cada arista del octaedro), paralelos a las aristas del octaedro generador.

Por consiguiente; el poliedro núcleo estará limitado por OCHO CARAS TRIANGULARES REGULARES, y DIEZ Y OCHO CARAS CUADRADAS.

Estas son las características geométricas del ARQUIMEDIANO V estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº---- Lámina 37, que detallamos a continuación:

ARQUIMEDIANO V

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$
Número de caras cuadradas	$C_4 = 18$
Número de vértices	$V = 24$
Número de aristas	$A = 48$
Número de caras en cada vértice	$1C_3 + 3C_4$

2) POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1" de la "truncadura paralela de aristas", y de los "π_2" de la "truncadura de vértices" con respecto al poliedro regular generador, se obtiene mediante las respectivas distancias "y" y "x", tomadas sobre las aristas y a partir de los vértices.

Para que el poliedro núcleo sea un Arquimediano, se han obtenido en el EJERCICIO PREVIO al modelo M-35.10, fórmulas generales (fórmula (3), párrafo 4.3), para la determinación de "x", y (fórmula (2), párrafo 4.2) para la de "y", que aplicaremos a este ejercicio.

2.1) Distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la truncadura paralela de aristas.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro gene-

Alcáraz Enero 1982

rador, de la fórmula general (2), deducida en M-35.10

$$y = \frac{tg.\ \frac{\alpha}{2}}{2\ (\cos\ \beta + 1)\ (\mathrm{sen}\ \varphi + tg\ \frac{\alpha}{2})}\ a_n \qquad (2)$$

En ésta sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al octaedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del octaedro = 8

b) a_n = Arista del octaedro = a_8

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360^\circ}{3} : 2 = 60^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del octaedro.

e) β = Angulo interno que forman dos lados consecutivos del polígono regular de una cara superficial = $\frac{180^\circ \times (3-2)}{3} = 60^\circ$

f) $\cos\ \beta = \cos\ 60^\circ = \frac{1}{2}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

g) $tg\ \frac{\alpha}{2} = tg\ 60 = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

h) $\mathrm{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (Ver ejercicio G.P. --- Lámina 3)

Aplicando los valores (f, g, h) a la fórmula (2), tendremos:

$$\boxed{y} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \left(\frac{1}{2}+1\right) \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{3}\right)}\, a_8 = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}\right)}\, a_8 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}\, a_8 = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}}\, a_8 = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\, a_8 = \boxed{\frac{3-\sqrt{2}}{7}\, a_8}$$

Este valor de "y" justifica al expresado en el enunciado de este ejercicio.

Puede obtenerse también en función de r_{ec}^{8} (dato de este modelo), sustituyendo $a_8 = \sqrt{2}\; r_{ec}^{8}$, valor que obtendremos posteriormente. Así pues, será:

$$\boxed{y} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}\, a_8 = \frac{3-\sqrt{2}}{7} \times \sqrt{2}\; r_{ec}^{8} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}-2}{7}\; r_{ec}^{8}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{y} = \frac{3\sqrt{2}-2}{7} \times 110 \simeq 0,32\,03\,77\,24\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{35,2 \text{ mm}}$$

2.2) Distancia "x" que fija la posición del plano "π_3" en la truncadura de vértices.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro generador, de la fórmula (3) deducida en M-35.10

$$\boxed{x = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}\, a_n} \qquad (3)$$

		Modelo M-37.6

En ella, sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes correspondientes al octaedro regular convexo generador.

a) n = Número de caras del octaedro = 6

b) a_n = Arista del octaedro = a_8

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara $= \frac{360°}{3} : 2 = 60°$

d) β = Angulo interno que forman dos lados consecutivos del polígono regular de una cara superficial $= \frac{180° \times (3-2)}{3} = 60°$

f) $\cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{60°}{2} = \cos^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ (Ver ejerc. G.P. 1006)

g) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. nº--- Lámina 3)

h) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1.006)

Aplicando los valores (f, g, h) en la fórmula (3), tendremos:

$$\boxed{x} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3}\right)} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2} \times \left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}\right)} a_8 = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{3}} a_8 =$$

$$= \frac{2}{3 + \sqrt{2}} a_8 = \frac{2 \times (3 - \sqrt{2})}{7} a_8 = \boxed{\frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} a_8}$$

Este valor de "x" justifica el expresado en el enunciado de este ejercicio

[signature] Enero 1981

Puede obtenerse también en función de r_{ec}^8 (dato de este ejercicio, sustituyendo $a_8 = \sqrt{2}\, r_{ec}^8$ (valor que obtendremos posteriormente). Así pues, será:

$$x = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} a_8 = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} \sqrt{2}\, r_{ec}^8 = \boxed{\frac{6\sqrt{2} - 4}{7} r_{ec}^8}$$

Su valor numérico será el siguiente:

$$x = \frac{6\sqrt{2} - 4}{7} \times 110 \cong 0,64\ 07\ 54\ 48\ 2... \times 110 \cong \boxed{70,5 \text{ mm}}$$

---

3) CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

3.1) OCTAEDRO REGULAR GENERADOR, DE CARAS VACIADAS

3.11 Arista "a_8" en función de r_{ec}^8

Su valor se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$" deducida en el ejercicio G.E. nº... Lámina 3. Despejando en ella "a_8", tendremos:

$$a_8 = r_{ec}^8 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times r_{ec}^8 = \frac{2\sqrt{2}}{2} r_{ec}^8 = \boxed{\sqrt{2}\ r_{ec}^8} ,$$

Valor que hemos aplicado en los párrafos 2.1 y 2.2

Su valor numérico será pues;

$$\boxed{a_8} = \sqrt{2}\ r_{ec}^{3} = \sqrt{2} \times 110 \cong 1{,}41\ 42\ 13\ 56\ 2 \ldots \times 110 \cong \boxed{155.6\ \text{mm.}}$$

PIEZA Nº 1 — CARAS SUPERFICIALES — 8 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura 1 del ejercicio M - 3.102

PIEZA Nº 2 — UNIONES ARISTAS — 12 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura nº 2 del ejercicio M - 3.102

3.2) ARQUIMEDIANO V (NÚCLEO DEL OCTAEDRO GENERADOR), DE CARAS MACIZAS, INCLUIDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL OCTAEDRO GENERADOR A LAS CARAS CUADRADAS DEL ARQUIMEDIANO V.

3.21) Longitud "a_v^8" de la arista del Arquimediano V, engendrado por el octaedro regular "P_8".

Se obtiene, en función de la arista "a_8" del octaedro generador, de la fórmula (1), deducida en el modelo M-35.10

$$a_{\Delta} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \; a_n \qquad (1)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al octaedro regular convexo generador:

a) $a_n = a_8$ = Arista del octaedro generador.

b) $a_{\Delta} = a_{\nabla}^{8}$ = Arista del Arquimediano generado

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial $= \frac{360^\circ}{3} : 2 = 60^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del octaedro

e) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1.006)

f) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (Ver ejercicio G.E. nº--- Lámina 3)

Aplicado los valores e) y f) a la fórmula (1), tendremos:

$$\boxed{a_{\nabla}^{8}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3}} \; a_8 = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}} \; a_8 = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3} + \sqrt{6}} \; a_8 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{3}} \; a_8 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} \; a_8 = \frac{\sqrt{2} \times (3 - \sqrt{2})}{7} \; a_8 = \boxed{\frac{3\sqrt{2} - 2}{7} \; a_8}$$

Puede obtenerse "a_{∇}^{8}" en función de "r_{ec}^{8}" (dato de este modelo), sustituyendo "$a_8 = \sqrt{2} \cdot r_{ec}^{8}$", valor obtenido en el párra-

Enero 1982

UNE A4 210 x 297

[illegible] 3.11 [illegible] será:

$$\boxed{a_v^8} = \frac{3\sqrt{2}-2}{7}\, a_8 = \frac{3\sqrt{2}-2}{7} \times \sqrt{2}\; r_{ec}^8 = \boxed{\frac{6-2\sqrt{2}}{7}\; r_{ec}^8}$$

Su valor numérico será el siguiente:

$$\boxed{a_v^8} = \frac{6-2\sqrt{2}}{7} \times 110 \cong 0,45\ 30\ 81\ 83\ 9 \ldots \times 110 \cong \boxed{49.8\ \text{mm}}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES

8 unidades

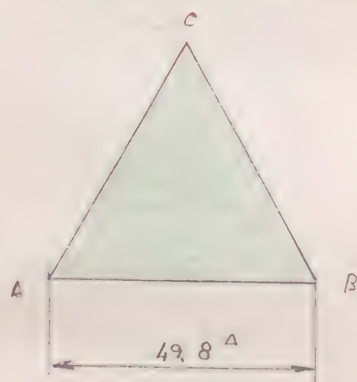


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 3 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 18 unidades

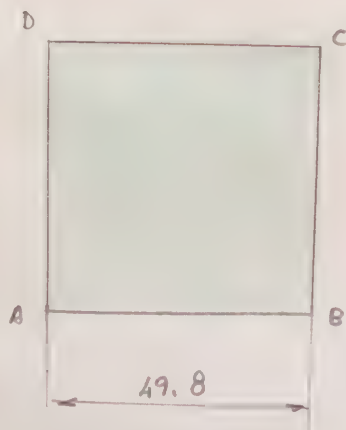


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 4 18 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES

8 unidades

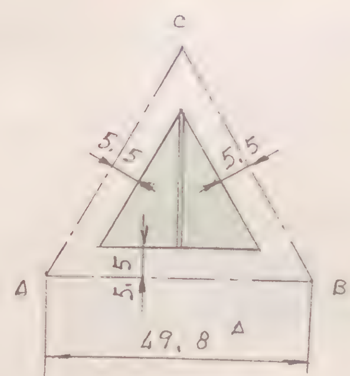


Figura 3

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 5 8(u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

18 unidades

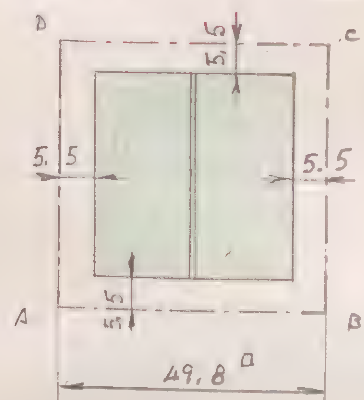


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 6 18 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 16 unidades

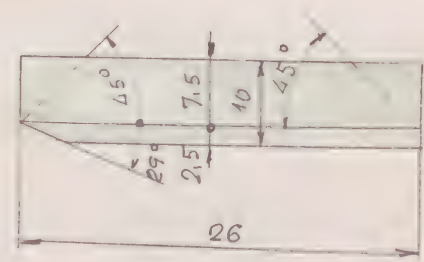


Figura 5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación, en la figura 3

PIEZA Nº 7 16 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS CUADRADAS 36 unidades

UNE A4 210 x 297

Calvarez Enero /1982

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6: su colocación, en la figura 4.

PIEZA Nº 8 36 (u)

Figura 6

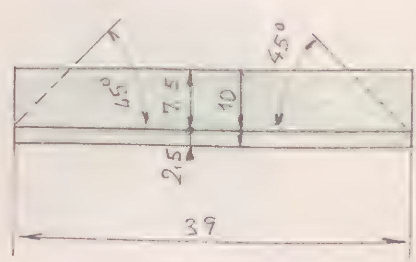


Figura 6

PIEZA Nº 9 . UNIONES ARISTAS 48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

PIEZA Nº 9 48 (u)

Figura 7

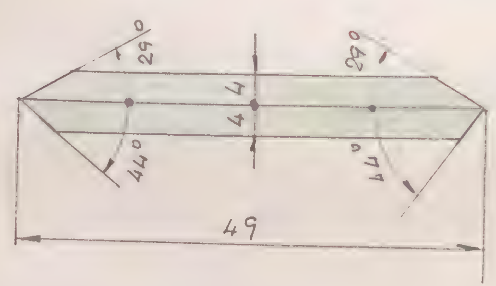


Figura 7

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES 8 unidades

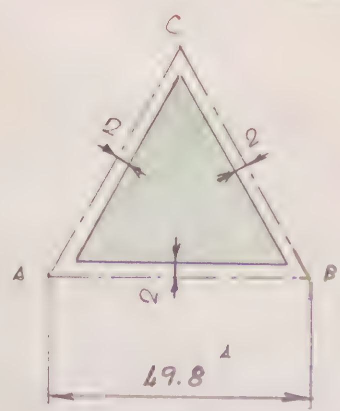


Figura 8

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 10 8 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 11 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

18 unidades

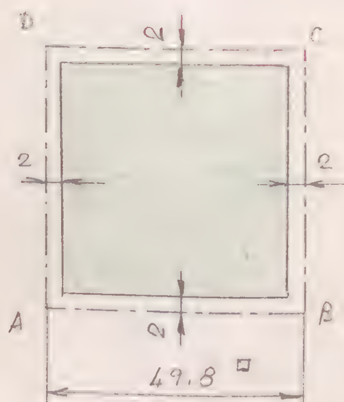


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 11 18 (u)

Figura 9

3.22) Arista lateral "a_ℓ" de las pirámides auxiliares cuadradas que fijan la posición de los vértices del octaedro generador con respecto al Arquimediano V.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del octaedro generador, de la fórmula (4) deducida en el modelo M- 35.10

$$a_\ell = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)} a_n \qquad (4)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al octaedro regular generador:

a) "a_n" = a_8 = Arista del octaedro.

b) "a_ℓ" = $a_4^{\triangledown}$ = Arista lateral de la pirámide cuadrada

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial $= \frac{360^\circ}{3} : 2 = 60^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del octaedro.

e) β = Angulo interno que forman dos lados consecutivos del polígono regular de una cara superficial $= \frac{180^\circ \times (3-2)}{3} = 60^\circ$

f) $\cos \frac{\beta}{2} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ver ejercicio G.P. 1.006)

g) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1.006)

h) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (Ver ejercicio G.P. nº.... - Lámina 3)

Aplicando estos valores a la fórmula (4), tendremos:

$$\boxed{a_4^{\nabla}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3}\right)} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}} a_8 = \frac{1}{\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}} a_8 =$$

$$= \frac{3}{3\sqrt{3} + \sqrt{6}} a_8 = \frac{3(3\sqrt{3} - \sqrt{6})}{21} a_8 = \boxed{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{7} a_8}$$

Puede obtenerse "a_4^{∇}" en función de r_{ec}^8 (dato de este modelo), sustituyendo "$a_8 = \sqrt{2}\, r_{ec}^8$", valor obtenido en el párrafo 3.11 de este ejercicio. Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_4^{\nabla}} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{7} a_8 = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{7} \times \sqrt{2}\, r_{ec}^8 = \frac{3\sqrt{6} - \sqrt{12}}{7} r_{ec}^8 = \boxed{\frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{7} r_{ec}^8}$$

Su valor numérico, será pues:

$$\boxed{a_4^V} = \frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{7} \times 110 \cong 0,55\ 49\ 09\ 65\ 9\ldots \times 110 \cong \boxed{61,0\ mm}$$

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES RECTAS, CUADRADOS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

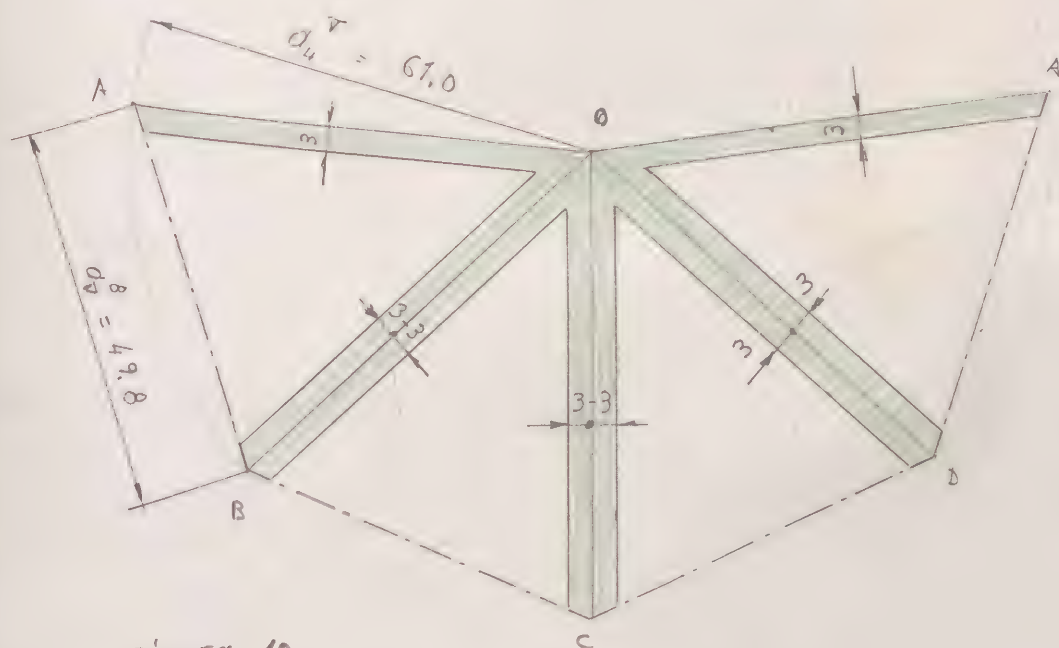


Figura 10

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 49,8$

PIEZA Nº 12

6 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

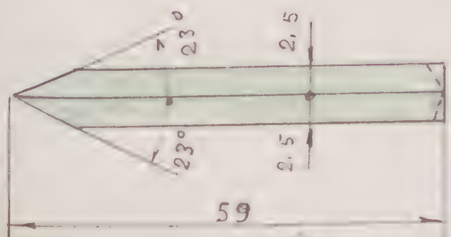


Figura 11

PIEZA Nº 13 24 (u)

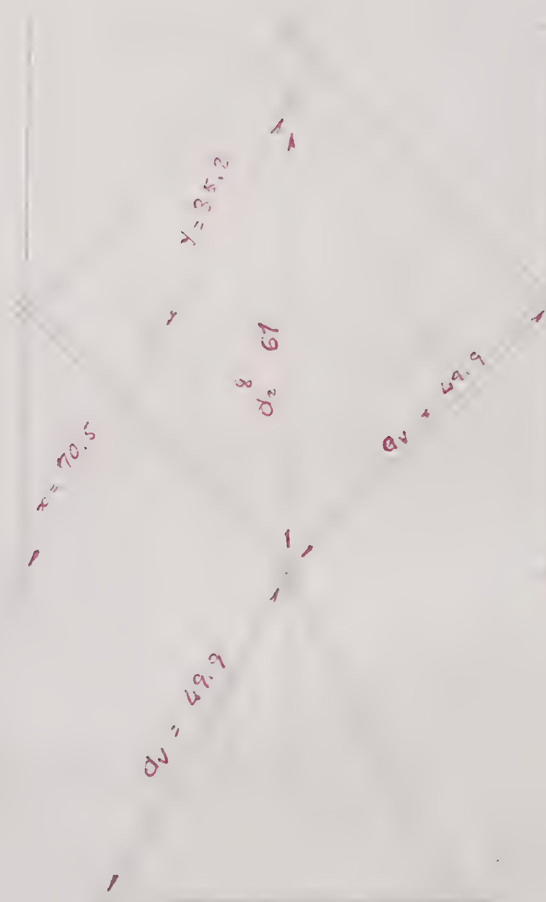
Figura 11

UNE A4 210 x 297

Enero 198?

Modelo M-37.6

Patrones









	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-38.1

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO VI", FORMADO POR VEINTE CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3); TREINTA CARAS CUADRADAS (C_4) Y DOCE CARAS PENTAGONALES REGULARES (C_{12}), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1 C_3 + 2 C_4 + 1 C_5$.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{VI} = 110 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-38.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO VI", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3); treinta caras cuadradas (C_4) y doce caras pentagonales regulares (C_{12}), concurriendo en cada vértice $1C_3 + 2C_4 + 1C_5$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G.E. nº --- Lámina 38, y representado en sus vistas principal, superior y lateral izquierda en la mencionada Lámina 38, a escala 1:1, con el radio r_{ec}^{VI} de su esfera circunscrita, de $r_{ec}^{VI} = 55$ mm.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita.

$$r_{ec}^{VI} = 110 \text{ mm}$$

Las características geométricas del ARQUIMEDIANO VI, son las siguientes:

Número de caras triangulares regulares ____ $C_3 = 20$

Número de caras cuadradas ____ $C_4 = 30$

Número de caras pentagonales regulares ____ $C_5 = 12$

Número de vértices $= \dfrac{20 \times 3 + 30 \times 4 + 12 \times 5}{4} =$ ____ $V = 60$

(sigue en página siguiente:

Alvarez   Enero 1982

UNE A4 210 x 297

Modelo M - 38.1

Número de aristas $= \dfrac{20\times3 + 30\times4 + 12\times5}{2} =$ —— $A = 120$

Número de caras en cada vértice $=$ —— $1C_3 + 2C_4 + 1C_5$

Para obtener el despiezo de este poliedro, calculemos previamente la longitud "a_{VI}" de la arista del mismo, en función del radio "r_{ec}^{VI}" de su esfera circunscrita.

Su valor se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{VI} = \frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\ a_{VI}$" obtenida en el mencionado ejercicio G. E. nº.... - Lámina 38.

Despejando en ella "a_{VI}", tendremos:

$$\boxed{a_{VI}} = r_{ec}^{VI} : \frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{11+4\sqrt{5}}}\ r_{ec}^{VI} = \frac{2\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{11+4\sqrt{5}}\ r_{ec}^{VI} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{(11+4\sqrt{5})^2}}\ r_{ec}^{VI} = 2\sqrt{\frac{1}{11+4\sqrt{5}}}\ r_{ec}^{VI} = 2\sqrt{\frac{11-4\sqrt{5}}{11^2-16\times5}}\ r_{ec}^{VI} =$$

$$= \boxed{2\times\sqrt{\frac{11-4\sqrt{5}}{41}}\ r_{ec}^{VI}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_{VI}} = 2\times\sqrt{\frac{11-4\sqrt{5}}{41}}\times 110 \cong 0,44\,78\,37\,96\,0\ldots \times 110 \cong \boxed{49,3\ \text{mm}}$$

Esta sola magnitud nos permite la construcción del poliedro estudiado, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

UNE A4:210 x 297

Alvarez Enero 1982

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

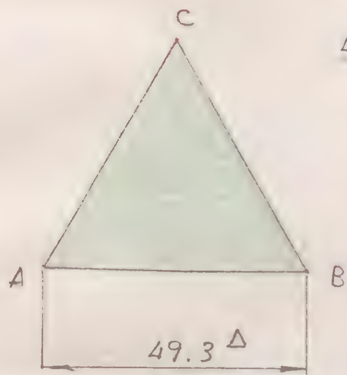


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 30 unidades

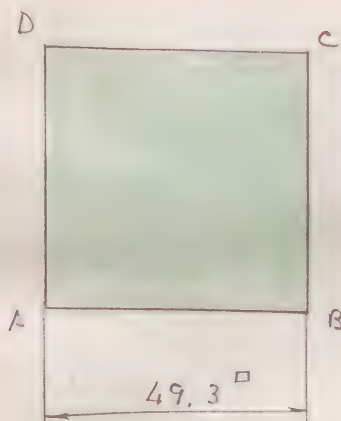


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan, en la figura 2

PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

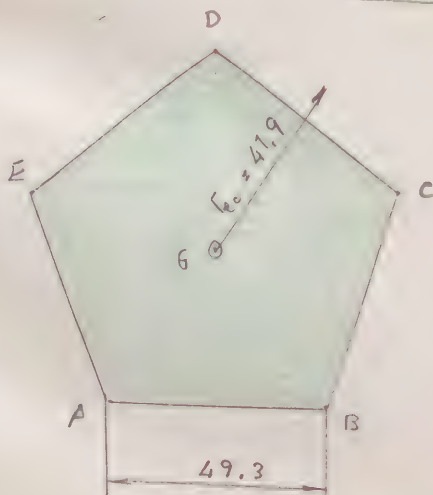


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Enero 1982

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

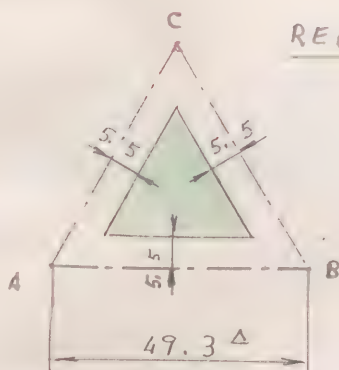


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 4.

PIEZA Nº 4 20 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

30 unidades

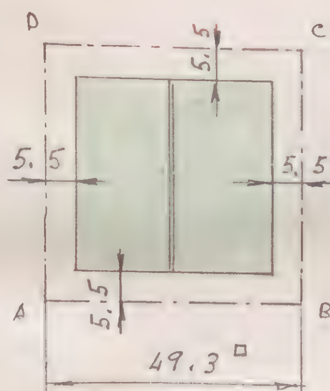


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5 30 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

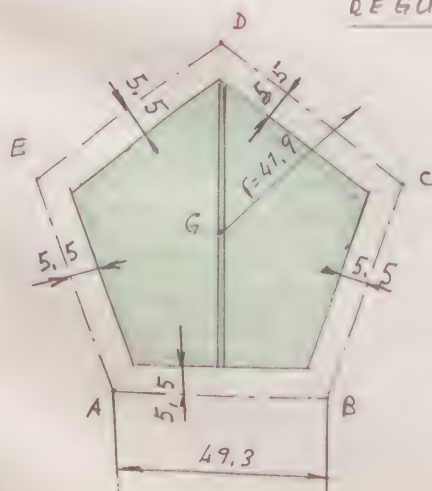


Figura 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura 6.

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6

UNE A4 210 x 297

Enero 1982



PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

60 unidades

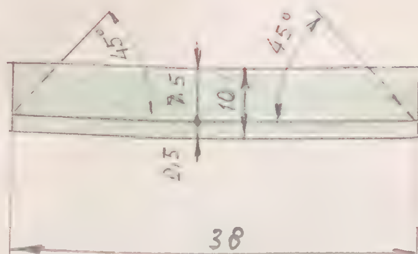


Figura 7

La forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 5.

PIEZA Nº 7 60 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 24 unidades

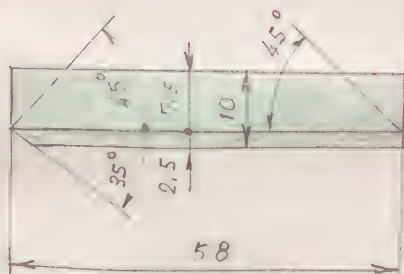


Figura 8

La forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación en la figura 6.

PIEZA Nº 8 24 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA PENTAGONAL 60 unidades

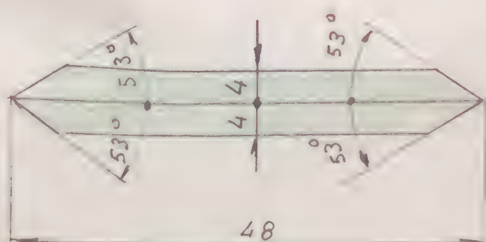


Figura 9

La forma y dimensiones se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 9

60 (u)

Figura 9

Enero 1982

Modelo M- 38,1

PIEZA Nº 13 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES REGULADES 12 unidades

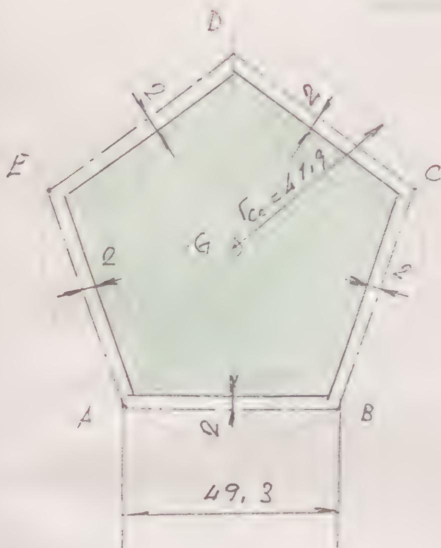


Figura 13

La forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura 13

PIEZA Nº 13 12 (u)

Figura 13

Alvarez Enero 1982

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS "ARQUIMEDIANO VI", FORMADO POR VEINTE CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3); TREINTA CARAS CUADRADAS (C_4), Y DOCE CARAS PENTAGONALES REGULARES (C_5), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE: $1C_3 + 2C_4 + 1C_5$.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{e_0}^{VI} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 38.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO VI", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3); treinta caras cuadradas (C_4), y doce caras pentagonales regulares (C_5), concurriendo en cada vértice $1 C_3 + 2 C_4 + 1 C_5$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M- 38.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M - 38.1

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{VI} = Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{VI} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

UNE A4 210 x 297

Enero 1982



Modelo M - 38.2

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

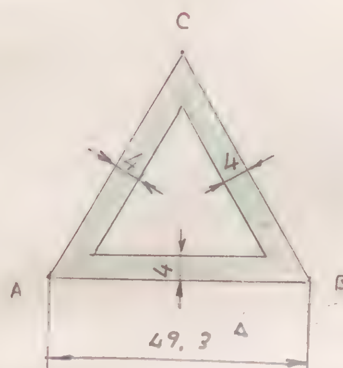


Figura 1

La forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

PIEZA Nº 1. 20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

30 unidades

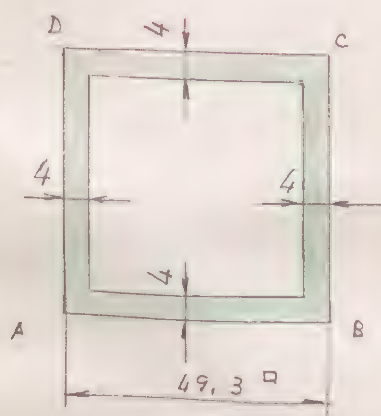


Figura 2

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2.

PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

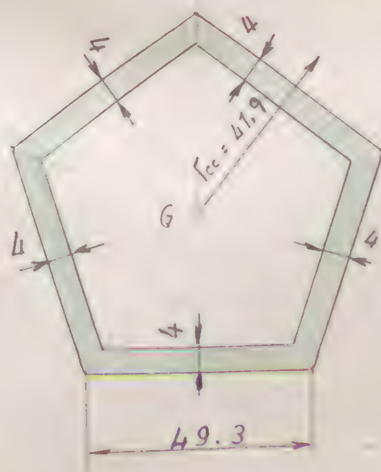


Figura 3

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 12 (U)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1982



PIEZA Nº 4 UNIONES DE ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA PENTAGONAL 60 unidades

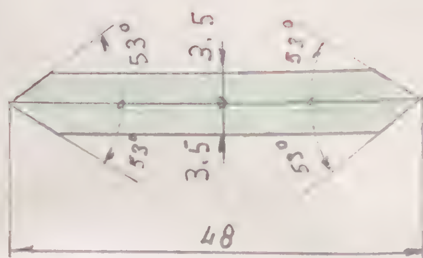


Figura 4

La forma y dimensiones se detallan en la figura 4.

PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES DE ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA TRIANGULAR 60 unidades

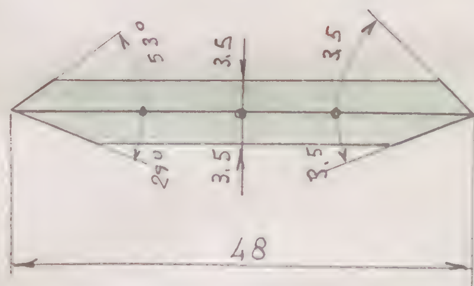


Figura 5

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº5 60 (u)

Figura 5

VARIANTE DEL MODELO M-38.1, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{VI} = 76,1 \text{ mm}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO VI", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3); treinta caras cuadradas (C_4) y doce pentagonales regulares (C_5), concurriendo en cada vértice $1\,C_3 + 2\,C_4 + 1\,C_5$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M - 38.1, de igual forma y de menor longitud el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{VI} = 76.1$ mm < 110 mm)

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico realizado en M - 38.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción "$k = 76.1 : 110$" o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{VI} = 76,1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$K = \frac{76,1}{110} = 0,69\overset{\frown}{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

Tálvarez Enero 1982

Modelo M-38.3

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-38.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-38.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1 20 (u)	49.3	34.1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 30 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 2 30 (u)	49.3	34.1

UNE A4 210 x 297

Enero 1982



		Modelo M - 38,3

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 12 (u)	49,3 41,9	34,1 28,9

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4 20 (u)	49,3 5,5	34,1 4,5

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

La Figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas: 30 unidades

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5 30 (u)	49,3 5,5	34,1 4,5

UNE A4 210 x 297

Modelo M - 38.3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 6	49.3	34.1
12 (u)	41.9	28.9
	5.5	4.5

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS 60 unidades

La figura 7, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº6	38	24
60 (u)	10	10
	2.5	2.5
	7.5	7.5
	45°	45°

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 24 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes



		Modelo M-38.3

cotas modificadas:

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 24 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº8	58	44
24 (u)	10	10
	2,5	3, 5
	7, 5	7. 5
	45°	45°
	35°	35°

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA PENTAGONAL 60 unidades

La figura 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 9	48	33
60(u)	4	3. 5
	53°	53°

UNE A4 210 x 297

[signature] Enero 1982

Modelo M - 38.3

PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA TRIANGULAR 60 unidades

La figura 10, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 10	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 10 60 (u)	48	33
	4	3,5
	29º	29º
	53º	53º

PIEZAS Nos 11 Y 12 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES 20 (u) Y CUADRADAS 30 (u).

Las figuras 11 y 12, han de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURAS 11 Y 12	Longitudes mm	Cotas modificadas
Piezas 11 (20 u)	49.3	34,1
y 12 (30 u)	2,-	2,-

PIEZA Nº 13 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

La figura 10, ha de construirse con las siguientes cotas mo-

VARIANTE DEL modelo M-38.2

DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ee}^{VI} = 76.1 \text{ mm}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 38.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO VI", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3); treinta caras cuadradas (C_4) y doce caras pentagonales regulares (C_5), concurriendo en cada vértice $1 C_3 + 2 C_4 + 1 C_5$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M - 38.2, de igual forma, pero siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{IV} = 76.1$ mm).

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M - 38.2, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción $K = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{VI} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1982

Modelo M-38.4

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

La figura 1, ha de construirse, con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 1	Longitudes mm	Cotas modificadas
Pieza nº 1	49.3	34.1
20 (u)	4.-	3.-

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

30 unidades

La figura 2, ha de construirse, con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 2	49.3	34.1
30 (u)	4.-	3.-

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

Modelo M-38.4

La figura 3 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3	49.3	34.1
12 (u)	41.9	28.9
	4.–	3.–

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA PENTAGONAL 60 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4	48	33.–
60 (u)	4	3.–
	53°	53°

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA TRIANGULAR 60 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 5	48	33
60 (u)	3.5	2.5
	29°	29°
	53°	53°

UNE A4 210 x 297

Febrero 1982

EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO VI", OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_{12}", A LA DISTANCIA "$y = \frac{1}{3} a_{12}$", SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE VÉRTICES (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "$x = \frac{2}{3} a_{12}$", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LAS DISTANCIAS "y" Y "x" RESPECTIVAMENTE. EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador: $r_{ec}^{12} = 110$ mm.

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-38.5

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO-VI" obtenido por "truncadura paralela de aristas" de un dodecaedro regular convexo, de arista "a_{12}" a la distancia $y = \frac{1}{3} a_{12}$, seguida de una truncadura de vértices" (o viceverso), a la distancia $x = \frac{2}{3} a_{12}$; al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente. El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el dodecaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{12} = Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \ mm$$

En el ESTUDIO PREVIO realizado en el modelo M-35.10, desarrollamos el proceso geométrico, denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" (o viceversa), de un poliedro regular convexo, que aplicaremos seguidamente a este ejercicio.

Dicho proceso da lugar a la formación, en cada poliedro regular generador, de un poliedro núcleo, convexo, cuyas ca-

		Modelo M- 38.5

racterísticas geométricas detallamos en el párrafo 2, y que en particular, y en el caso especial descrito en este enunciado, dicho poliedro es un ARQUIMEDIANO

Las características geométricas del poliedro núcleo obtenido en su ejercicio, se deducen previamente de las generales detalladas en el mencionado EJERCICIO PREVIO, y son las siguientes:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas, producen en el caso del dodecaedro regular, doce pentágonos regulares situados en las caras del dodecaedro generador.

b) Los planos secantes "π_2" de la truncadura de vértices proceden a su vez, veinte triángulos equiláteros (uno en cada vértice), situados en el plano secante "π_2".

c) Los planos secantes "π_1" y "π_2" al cortarse mutuamente producen a su vez treinta cuadrados (uno por cada arista del dodecaedro), paralelos a las aristas del dodecaedro generador.

Por consiguiente, el poliedro núcleo estará limitado por VEINTE CARAS TRIANGULARES REGULARES, TREINTA CARAS CUADRADAS y DOCE CARAS PENTAGONALES REGULARES.

Estas son las características geométricas del ARQUIMEDIANO VI, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº ---- Lámina 38, que detallamos a continuación:

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1982

ARQUIMEDIANO VI

Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
Número de caras cuadradas	$C_4 = 30$
Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
Número de vértices	$V = 60$
Número de aristas	$A = 120$
Número de caras en cada vértice	$1C_3 + 2C_4 + 1C_5$

---

2) POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1" de la "truncadura paralela de aristas", y de los "π_2" de la "truncadura de vértices" con respecto al poliedro regular generador, se obtiene mediante las respectivas distancias "y" y "x", tomadas sobre las aristas y a partir de los vértices.

Para que el poliedro núcleo sea un Arquimediano, se han obtenido en el EJERCICIO PREVIO al modelo M-35.10, fórmulas generales (fórmula (3), párrafo 4.3) para la determinación de "x", y (fórmula (2), párrafo 4.2) para la de "y", que aplicaremos a este ejercicio.

2.1 Distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la truncadura paralela de aristas.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro ge-

nerador, de la fórmula general (2), deducida en M-35.10

$$y = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2(\cos\beta + 1)(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})}\, a_n \qquad (2)$$

En ésta, sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al dodecaedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del dodecaedro = 12

b) a_n = Arista del dodecaedro = a_{12}

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360^\circ}{5} : 2 = 36^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del dodecaedro

e) β = Ángulo interno que forman dos lados consecutivos del polígono regular de una cara superficial = $\frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$

f) $\cos\beta = \cos 108^\circ = -\cos(180^\circ - 108^\circ) = -\cos 72^\circ = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

g) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ (Ver ejercicio G.P. 1.006)

h) $\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ (Ver ejercicio G.P. n°.... - Lámina 4)

Aplicando los valores f), g), h, a la fórmula (2), tendremos:

$$\boxed{y} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2 \times \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4}+1\right) \times \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right]} a_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\frac{2(5-\sqrt{5})}{4} \times \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right]} a_{12} =$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{5-2\sqrt{5}} \times \sqrt{5-2\sqrt{5}}}{(5-\sqrt{5}) \times \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{5-2\sqrt{5}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}} \times \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right]} a_{12} =$$

$$= \frac{2(5-2\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5}) \times \left[\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{10}} + (5-2\sqrt{5})\right]} a_{12} =$$

desarrollando el producto $(5+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})$ y sustituyendo:

$$\boxed{(5+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} = 25 + 5\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 10 = 15 - 5\sqrt{5} = \boxed{5(3-\sqrt{5})}$$

(sigue)

$$= \frac{2(5-2\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5}) \times \left[\sqrt{\frac{5(3-\sqrt{5})}{10}} + (5-2\sqrt{5})\right]} a_{12} = \frac{2(5-2\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5}) \times \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + (5-2\sqrt{5})} a_{12} =$$

$$= \frac{2}{(5-\sqrt{5}) \times \left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} : (5-2\sqrt{5})^2} + 1\right]} a_{12} =$$

desarrollando la expresión $\frac{3-\sqrt{5}}{2} : (5-2\sqrt{5})^2$ y sustituyendo:

$$\boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{2} : (5-2\sqrt{5})^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2 \times (25+20-20\sqrt{5})} = \frac{3-\sqrt{5}}{2 \times (45-20\sqrt{5})} = \boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{2 \times 5\,(9-4\sqrt{5})}}$$

(sigue)

$$= \frac{2}{(5-\sqrt{5}) \times \left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10(9-4\sqrt{5})}} + 1\right]} a_{12} = \frac{2}{(5-\sqrt{5}) \times \left[\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}{10 \times (81-80)}} + 1\right]} a_{12} =$$

Modelo M-37.6

Desarrollando la expresión $(3-\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})$ y sustituyendo

$$(3-\sqrt{5})(9+4\sqrt{5}) = 27 - 9\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 20 = 7 + 3\sqrt{5}$$

(sigue)

$$= \frac{2}{(5-\sqrt{5}) \times \left[\sqrt{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{10}} + 1\right]}\, a_{12} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{(7+3\sqrt{5})(5-\sqrt{5})^2}{10}} + (5-\sqrt{5})}\, a_{12} =$$

Desarrollando la expresión $(7+3\sqrt{5})(5-\sqrt{5})^2$ y sustituyendo

$$(7+3\sqrt{5})(5-\sqrt{5})^2 = (7+3\sqrt{5})(25+5-10\sqrt{5}) = (7+3\sqrt{5})(30-10\sqrt{5}) =$$

$$= 10(7+3\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 10 \times (21 + 9\sqrt{5} - 7\sqrt{5} - 15) = 10(6+2\sqrt{5})$$

(sigue)

$$= \frac{2}{\sqrt{\dfrac{10(6+2\sqrt{5})}{10}} + (5-\sqrt{5})}\, a_{12} = \frac{2}{\sqrt{2(3+\sqrt{5})} + (5-\sqrt{5})}\, a_{12} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{3+\sqrt{5}} + (5-\sqrt{5})}\, a_{12} =$$

y siendo el radical $(3+\sqrt{5})$ un cuadrado perfecto $(3^2 - 5) = \sqrt{4} = 2$

$$= \frac{2}{\sqrt{2} \times \left[\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{5}{2}}\right] + (5-\sqrt{5})}\, a_{12} = \frac{2}{(1+\sqrt{5}) + (5-\sqrt{5})}\, a_{12} = \frac{2}{6}\, a_{12} =$$

$$= \frac{1}{3}\, a_{12}$$

De donde se obtiene finalmente que

$$y = \frac{1}{3}\, a_{12} \qquad (5)$$

Este valor de "y" justifica el expresado en el enuncia-

Alvarez Enero 1982



do de este ejercicio.

Puede obtenerse también el valor de "y" en función de r_{ec}^{12} (dato de este modelo), sustituyendo $a_{12} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}$ (valor que obtendremos posteriormente). Así pues, será:

$$\boxed{y} = \frac{1}{3} a_{12} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{9} r_{ec}^{12}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{y} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{9} \times 110 \cong 0,2378139 3 \ldots \times 110 \cong \boxed{26,25 \text{ mm}}$$

2.2) Distancia "x" que fija la posición del plano secante "π_2" en la truncadura de vértices.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro generador, de la fórmula (3) deducida en M-35.10

$$\boxed{x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)} a_n} \qquad (3)$$

En ella, sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares correspondientes al dodecaedro regular convexo generador.

Estos valores son los mismos que los empleados en el cálculo de la distancia "y", realizado en el párrafo 2.1, excepto el valor f) que se sustituye por:

Enero 1982



1) $\cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 54^0 = \left[\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \right]^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$

(Ver ejercicio G.P. 1.006)

Aplicando estos valores en la fórmula (3), tendremos:

$$x = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2 \times \frac{5-\sqrt{5}}{8} \times \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}} \right)} a_{12}$$ que puede simplificarse análogamente

a como se hizo en el párrafo 2.1.

Para soslayar este penoso desarrollo, tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:

1ª Comparando las fórmulas generales (2) y (3), se observa entre ambas una marcada analogía pues difieren tan sólo en que el factor $(\cos\beta + 1)$ del denominador de la (2), queda sustituido por el factor $\cos^2\frac{\beta}{2}$ del denominador de la (3).

2ª Por lo tanto, la fórmula (2) puede escribirse de la siguiente manera

$$y = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2(\cos\beta+1)(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})} a_n = \frac{1}{\cos\beta+1} \times \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})} a_n$$

$$= \frac{1}{\cos\beta+1} \times E = \frac{1}{3} a_n$$ (siendo la expresión algebraica

$$E = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})} a_n$$ y por lo tanto:

$$E = \frac{1}{3} a_n : \frac{1}{\cos\beta+1} = \frac{\cos\beta+1}{3} a_n \qquad (6)$$

3ª.- Igualmente la fórmula (3) puede escribirse también



		Modelo M-37.7

$$\boxed{x} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}} \times \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\left(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)} a_n =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}} \times E = \frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}} \times \frac{\cos\beta + 1}{3} a_n = \frac{\cos\beta + 1}{3\cos^2\frac{\beta}{2}} a_n =$$

$$= \frac{\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 1\right)}{3 \times \frac{5-\sqrt{5}}{8}} a_{12} = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{4}}{\frac{3(5-\sqrt{5})}{8}} a_{12} \quad \frac{1}{4} : \frac{3}{8} a_n = \frac{8}{12} a_n \boxed{= \frac{2}{3} a_n}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{x = \frac{2}{3} a_{12}} \qquad (6)$$

Este valor de "x" justifica el expresado en el enunciado de este ejercicio

Puede obtenerse también el valor de "x" en función de r_{ec}^{12} (dato de este modelo), sustituyendo $a_{12} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}$ (valor que obtendremos posteriormente). Así pues, será:

$$\boxed{x} = \frac{2}{3} a_{12} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{2\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}{9} r_{ec}^{12}}$$

Su valor numérico será el siguiente:

$$\boxed{x} = \frac{2\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}{9} \times 110 \cong 0,47\,57\,62\,78\,6\ldots \times 110 \cong \boxed{52,3 \text{ mm}}$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Enero 1982



3) CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

3.1) DODECAEDRO REGULAR GENERADOR, DE CARAS VACIADAS.

3.11) Arista "a_{12}" en función de r_{ec}^{12}

Su valor se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} a_{12}$" deducida en el ejercicio G.E. nº---- Lámina 4. Despejando en ella "a_{12}", tendremos:

$$\boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}} r_{ec}^{12} = \frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12} r_{ec}^{12} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}}$$

Valor que hemos aplicado en los párrafos 2.1 y 2.2

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} \times 110 \cong 0{,}71\,36\,44\,17\,9\ldots \times 110 = \boxed{78{,}5 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 1 — CARAS SUPERFICIALES — 12 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura nº 1 del ejercicio M-4.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 (unidades)

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura nº 2 del ejercicio M-4.10².

3.2) ARQUIMEDIANO VI (NÚCLEO DEL DODECAEDRO GENERADOR), DE CARAS MACIZAS, INCLUÍDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL DODECAEDRO GENERADOR A LAS CARAS TRIANGULARES DEL ARQUIMEDIANO VI.

3.21) Longitud "a^{12}_{VI}" de la arista del Arquimediano VI, engendrado por el dodecàedro generador "P_{12}":

Se obtiene, en función de la arista "a_{12}" del dodecaedro generador, de la fórmula (1), deducida en el modelo M - 35.10

$$a_{\Delta} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\, a_n \qquad (1)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al dodecaedro regular convexo generador.



		Modelo 11-37.6

a) n = Número de caras del dodecaedro = 12

b) a_n = Arista del dodecaedro = a_{12}

c) $\frac{\alpha}{2}$: Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360^\circ}{5} : 2 = 36^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del dodecaedro.

e) $\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ (Ver ejercicio G.E. nº... - Lámina 4)

f) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

Aplicando los valores e) y f) a la fórmula (1), tendremos:

$$d_A = \boxed{a^{12}_{VI}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}} a_{12} = \frac{1}{1 + \sqrt{5-2\sqrt{5}} : \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}} a_{12} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{(5-2\sqrt{5}) : \frac{5+\sqrt{5}}{10}}} a_{12} = \frac{1}{1 + \sqrt{(5-2\sqrt{5}) : \frac{5+\sqrt{5}}{10}}} a_{12} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{10(5-2\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})}}} a_{12} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{10(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{20}}} a_{12} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{25 - 10\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 10}{2}}} a_{12} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{35 - 15\sqrt{5}}{2}}} a_{12} =$$

UNE A4 210 x 297

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{\dfrac{5\,(7-3\sqrt{5})}{2}}}\, d_{12} = \frac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{7-3\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}}\, d_{12} =$$

y siendo el radical $(7+3\sqrt{5})$ un cuadrado perfecto $(7^2 - (3\sqrt{5})^2) = (49-45) = 4 = 2^2$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{5} \times \left(\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)}{\sqrt{2}}}\, d_{12} = \frac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{\frac{45}{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}}\, d_{12} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{45}}{2} - \frac{5}{2}}\, d_{12} = \frac{1}{\frac{2}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2}}\, d_{12} = \frac{1}{\dfrac{2 + 3\sqrt{5} - 5}{2}}\, d_{12} =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{5} - 3}\, d_{12} = \frac{2}{3\,(\sqrt{5}-1)}\, d_{12} = \frac{2\,(\sqrt{5}+1)}{3 \times 4}\, d_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{6}\, d_{12}}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{d^{12}_{VI} = \frac{\sqrt{5}+1}{6}\, d_{12}}$$

Puede obtenerse también el valor de d^{12}_{VI} en función de r^{12}_{ec} (dato de este modelo), sustituyendo " $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r^{12}_{ec}$ " (valor obtenido en párrafo 3.11). Así pues, será:

$$\boxed{d^{12}_{VI}} = \frac{\sqrt{5}+1}{6}\, d_{12} = \frac{\sqrt{5}+1}{6} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r^{12}_{ec} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{18}\, r^{12}_{ec} =$$

$$= \frac{\sqrt{75} + \sqrt{15} - \sqrt{15} - \sqrt{3}}{18}\, r^{12}_{ec} = \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{3}}{18}\, r^{12}_{ec} = \frac{4\sqrt{3}}{18}\, r^{12}_{ec} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9}\, r^{12}_{ec}}$$

Su valor numérico, será pues:

$$\boxed{d^{12}_{VI}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times 110 \cong 0{,}384900180\ldots \times 110 \cong \boxed{42.3 \text{ mm}}$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1982

Modelo M-37.6

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

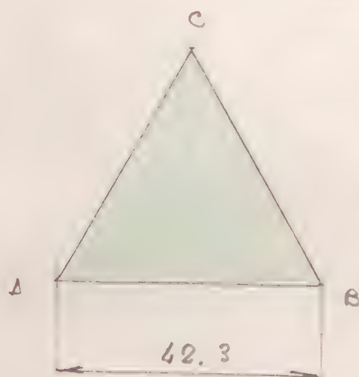


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

PIEZA Nº 3 20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 30 unidades

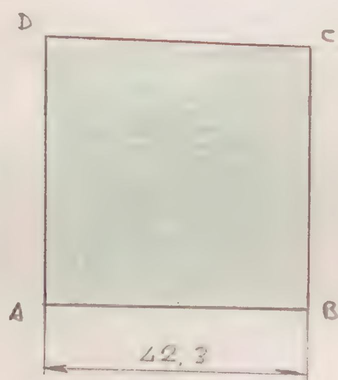


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 4 30 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES 12 unidades



Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

PIEZA Nº 5

12 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Modelo M-37.6

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

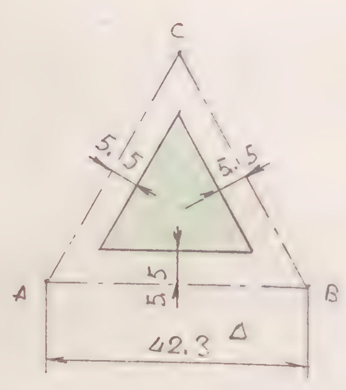


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 6 20 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS 30 unidades

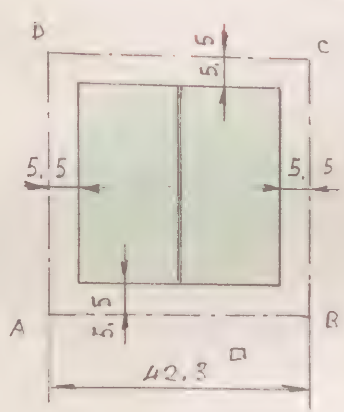


Figura 5

La forma y dimensiones se deducen de las cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 30 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

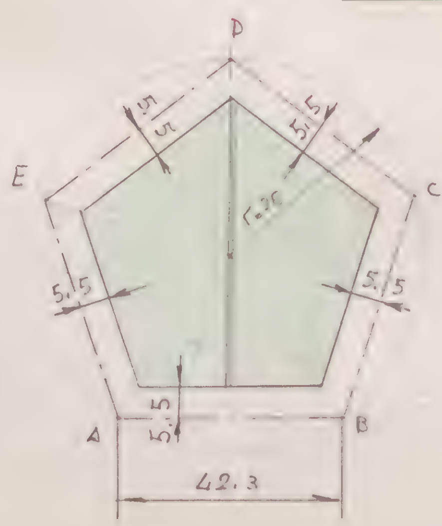


Figura 6

La forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 8 12 (u)

Figura 6

Alvarez Enero 1982

Modelo M-37.6

PIEZA Nº 9 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

60 unidades

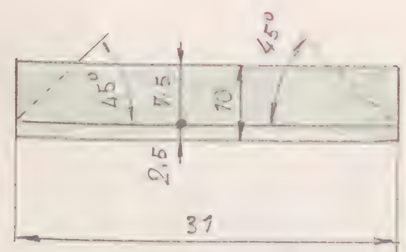


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 5

PIEZA Nº 9 60 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 REFUERZO NORMAL EN CARAS PENTAGONALES REGULARES

24 unidades

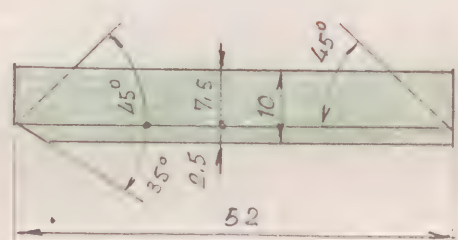


Figura 8

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación en la figura 6

PIEZA Nº 10 24 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA PENTAGONAL

60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9

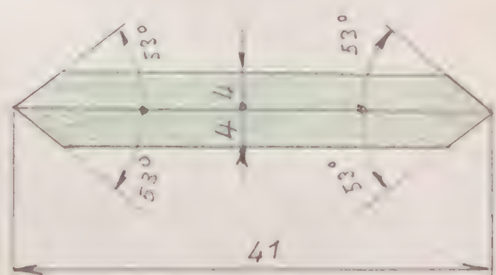


Figura 9

PIEZA Nº 11

60 (u)

Figura 9

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1982

Modelo M-37.6

PIEZA Nº 12 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA TRIANGULAR 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

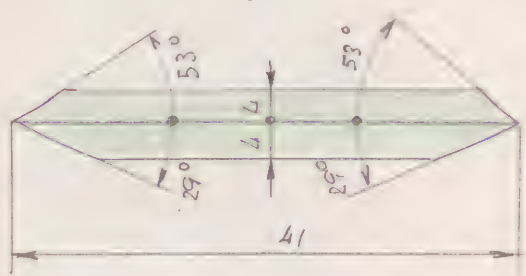


Figura 10

PIEZA Nº 12 60 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 13 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

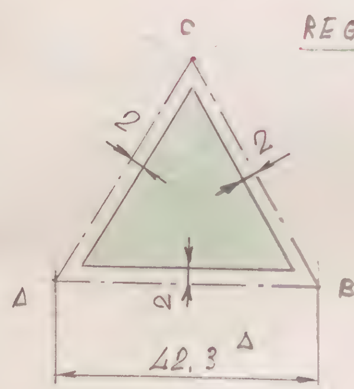


Figura 11

Su forma y dimensiones se deducen de las del Triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 13 20 (u)

Figura 11

PIEZA Nº 14 FORRO COLOREADO EN PIEZAS CUADRADAS 30 unidades

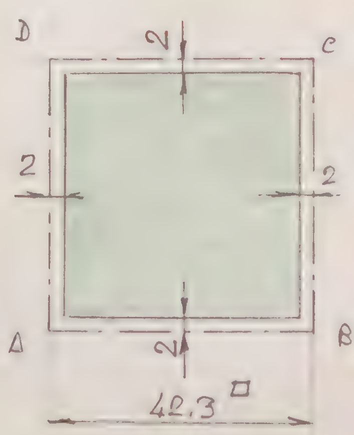


Figura 12

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la fig. 12

PIEZA Nº 14 30 (u)

Figura 12

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1982

PIEZA Nº 15 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

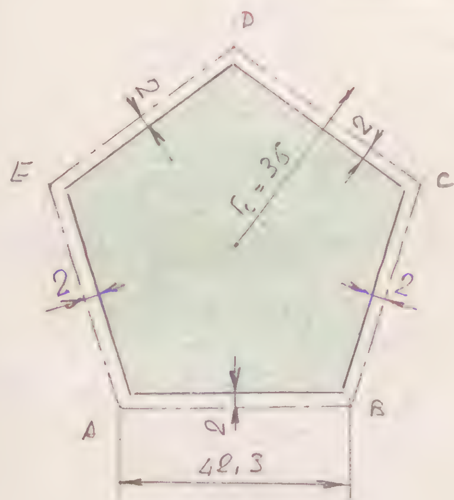


Figura 13

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura 13

PIEZA Nº 15 12 (u)

Figura 13

3.22) Arista lateral "a_ℓ" de las pirámides auxiliares triangulares que fijan la posición de los vértices del dodecaedro generador, con respecto al Arquimediano VI.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del dodecaedro generador, de la fórmula (4) deducida en el modelo M - 35.10

$$a_\ell = \frac{k_g \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\beta}{2} \; (\operatorname{sen} \varphi + k_g \frac{\alpha}{2})} \, a_n \qquad (4)$$

Comparando esta fórmula con las fórmula general (2), se observa entre ambas una marcada analogía, pues difieren tan sólo en que el factor $(\cos \beta + 1)$ del denominador de la (2), queda sustituido por el factor $\cos \frac{\beta}{2}$ en la (4).

Por consiguiente, la fórmula (2) puede escribirse de la

		Modelo M - 37.6

siguiente manera:

$$y = \frac{tg\ \frac{\alpha}{2}}{2\ (\cos\beta + 1)\ (\operatorname{sen}\varphi + tg\ \frac{\alpha}{2})}\ a_n = \frac{1}{\cos\beta + 1} \times \boxed{\frac{tg\ \frac{\alpha}{2}}{2\left(\operatorname{sen}\varphi + tg\ \frac{\alpha}{2}\right)}\ a_n}$$

en la que sustituyendo el valor "$y = \frac{1}{3} a_n$", obtenido anteriormente (ver párrafo 2.1), tendremos:

$$\frac{1}{3} a_n = \frac{1}{\cos\beta + 1} \times \boxed{\frac{tg\ \frac{\alpha}{2}}{2\left(\operatorname{sen}\varphi + tg\ \frac{\alpha}{2}\right)}\ a_n} = \frac{1}{\cos\beta + 1} \times E \text{ , siendo}$$

E, la espresión algébrica recuadrada; Despejando E, será:

$$E = \frac{1}{3} a_n : \frac{1}{\cos\beta + 1} = \frac{\cos\beta + 1}{3}\ a_n \qquad (6)$$

Análogamente, la fórmula (4) puede también escribirse:

$$\boxed{a_\ell} = \frac{tg\ \frac{\alpha}{2}}{2\ \cos\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{sen}\varphi + tg\ \frac{\alpha}{2}\right)}\ a_n = \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}} \times \boxed{\frac{tg\ \frac{\alpha}{2}}{2\ (\operatorname{sen}\varphi + tg\ \frac{\alpha}{2})}\ a_n} =$$

y sustituyendo E por su valor (6)

$$= \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}} \times \frac{\cos\beta + 1}{3}\ a_n = \boxed{\frac{\cos\beta + 1}{3\cos\frac{\beta}{2}}\ a_n} \qquad (7)$$

En esta fórmula simplificada (7), sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al dodecaedro regular convesco generador:

a) n = Número de caras del dodecaedro = 12

Calvarez Enero 1982

UNE A4 210 x 297

Modelo M-37,6

b) $a_n = a_{12}$ = Arista del dodecaedro

c) β = Ángulo interno que forman dos lados consecutivos del polígono regular de una cara superficial $= \dfrac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$

d) $\cos\beta = \cos 108^\circ = -\cos(180^\circ - 108^\circ) = -\cos 72^\circ = -\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

(ver ejercicio G. P. 1006)

e) $\cos\dfrac{\beta}{2} = \cos\dfrac{108^\circ}{2} = \cos 54^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ (ver ej. G. P. 1006)

Aplicando estos valores a la fórmula (7), tendremos:

$$\boxed{a_\ell} = \frac{\cos\beta + 1}{3\cos\frac{\beta}{2}}\, a_n = \frac{\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)+1}{3\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}\, a_{12} = \frac{\frac{4-(\sqrt{5}-1)}{4}}{\frac{3}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\, a_{12} =$$

$$= \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{4}}{\frac{3}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\, a_{12} = \frac{5-\sqrt{5}}{3\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\, a_{12} = \frac{(5-\sqrt{5})\times\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3\times(10-2\sqrt{5})}\, a_{12} =$$

$$= \frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3\times 2\,(5-\sqrt{5})}\, a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{6}\, a_{12}}$$

Puede obtenerse también el valor de "a_ℓ" en función de r_{ec}^{12} (dato de este modelo), sustituyendo $a_{12} = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}$

Así pues, será:

$$\boxed{a_\ell} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{6}\, a_{12} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{6} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}} \times (\sqrt{15}-\sqrt{3})}{18}\, r_{ec}^{12}$$

$$= \frac{\sqrt{2\,(5-\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}}{18}\, r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{2\,(5-\sqrt{5})(15+3-2\sqrt{45})}}{18}\, r_{ec}^{12} =$$

UNE A4 210 x 297

Álvarez Enero 1982

Modelo M - 37.6

$$= \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})(18-6\sqrt{5})}}{18} r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{2 \times 6 \times (5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}{18} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{12(15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5)}}{18} r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{3(20-8\sqrt{5})}}{18} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{3 \times 4 \times (5-2\sqrt{5})}}{9} r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{3(5-2\sqrt{5})}}{9} r_{ec}^{12} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3(5-2\sqrt{5})}}{3} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{3(5-2\sqrt{5})}{3^2}} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3}} r_{ec}^{12}}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_l = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3}} r_{ec}^{12}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_l} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3}} \times 110 \cong 0{,}27\ 96\ 46\ 35\ 0 \ldots \times 110 \cong \boxed{30{,}8 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 16 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES, RECTAS, TRIANGULARES

20 unidades

Su forma y dimensiones, se detallan en la figura 14.

UNE A4 210 x 297

Modelo M - 37.6

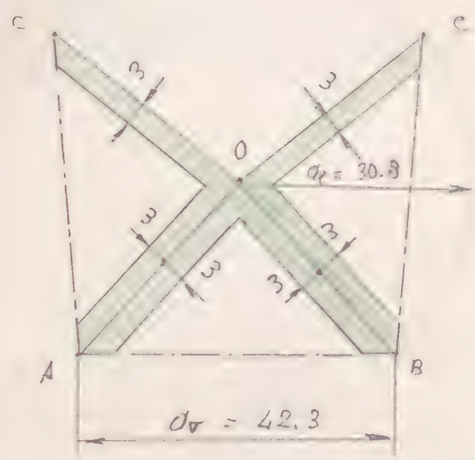


Figura 14

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 42,3 = d_V$

PIEZA Nº 16 20 (u)

Figura 14

PIEZA Nº 17 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES 60 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 15

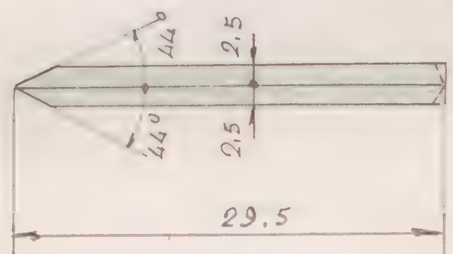


Figura 15

PIEZA Nº 17 60 (u)

Figura 15

UNE A4-210 x 297

Enero 1982

MODELO M- 38.5

Patrones

12 (u)

20 (u)

30 (u)

A = 120 (u)





Modelo CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO VI" OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_{20}", A LA DISTANCIA "$y = \frac{7-\sqrt{5}}{22}$", SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE vértices (o VICEVERSA) A LA distancia "$x = \frac{7-\sqrt{5}}{11}$", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LAS DISTANCIAS "y" Y "x" RESPECTIVAMENTE.- EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO VI, obtenido por "Truncadura paralela de aristas" de un icosaedro regular convexo, de arista "a_{20}" a la distancia $y = \frac{7-\sqrt{5}}{22}$, seguida de una "Truncadura de vértices" (o viceversa), a la distancia $x = \frac{7-\sqrt{5}}{11}$, al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente. El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el icosaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{20} = Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

En el ESTUDIO PREVIO realizado en el modelo M-35,10, desarrollamos el proceso geométrico denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES (o viceversa), de un poliedro regular convexo, que aplicaremos seguidamente a este ejercicio.

Dicho proceso da lugar a la formación, en cada poliedro regular generador, de un poliedro núcleo, convexo, cuyas características geométricas detallamos en el primer-



		Modelo M-38.6

fo 2, y que en particular, y en el caso especial descrito en este enunciado, dicho poliedro es un ARQUIMEDIANO

Las características geométricas del poliedro núcleo obtenido en este ejercicio, se deducen previamente de las generales detalladas en el mencionado EJERCICIO PREVIO, y son las siguientes:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas, producen en el caso del icosaedro regular, veinte triángulos equiláteros, situados en las caras del icosaedro generador.

b) Los planos secantes "π_2" de la truncadura de vértices, producen a su vez, doce pentágonos regulares (uno en cada vértice), situados en el plano secante "π_2".

c) Los planos secantes "π_1" y "π_2", al cortarse mutuamente, producen a su vez treinta cuadrados (uno por cada arista del icosaedro), paralelos a las aristas del icosaedro generador.

Por consiguiente, el poliedro núcleo estará limitado por VEINTE CARAS TRIANGULARES REGULARES, TREINTA CARAS CUADRADAS, y DOCE PENTÁGONOS REGULARES.

Estas son las características geométricas del ARQUIMEDIANO VI, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº... Lámina 38, que detallamos a continuación:

Calvache Enero 1982

ARQUIMEDIANO VI

Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
Número de caras cuadradas	$C_4 = 30$
Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
Número de vértices	$V = 60$
Número de aristas	$A = 120$
Número de caras en cada vértice	$1C_3 + 2C_4 + 1C_5$

---

2) POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1" de la "truncadura paralela de aristas", y de los "π_2" de la "truncadura de vértices" con respecto al poliedro regular generador, se obtiene mediante las respectivas distancias "y" y "x", tomadas sobre las aristas y a partir de los vértices.

Para que el poliedro núcleo sea un Arquimediano, se han obtenido en el EJERCICIO PREVIO al modelo M-35.10, fórmulas generales (fórmula (3), párrafo 4.3) para la determinación de "x", y (fórmula (2), párrafo 4.3) para la de "y", que aplicaremos a este ejercicio.

2.1) Distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la truncadura paralela de aristas.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro ge-

UNE A4 210 x 297

nerador, de la fórmula general (2), deducida en M-35.10

$$y = \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{2(\cos\beta + 1)(\operatorname{sen}\varphi + tg\frac{\alpha}{2})} \qquad (2)$$

En ésta, sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al icosaedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del icosaedro = 20

b) a_n = Arista del icosaedro = a_{20}

c) $\frac{\alpha}{2}$ = Semiángulo central del polígono regular de una cara superficial = $\frac{360^\circ}{3} : 2 = 60^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro que forman dos caras contiguas del icosaedro.

e) β = Ángulo interno que forman dos lados consecutivos del polígono regular de una cara superficial = $= \frac{180^\circ \times (3-2)}{3} = 60^\circ$

f) $\cos\beta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

g) $tg\frac{\alpha}{2} = tg\ 60^\circ = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

h) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$ (Ver G.P. nº... Lámina 5)

Aplicando los valores f), g), h) a la fórmula (2), tendremos:

Tavares Enero 1982



$$\boxed{y} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) \times \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} + \sqrt{3}\right)} a_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3\left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} + \sqrt{3}\right)} a_{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{6} \times 3} a_{20} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15} + 7\sqrt{3}}{2}} a_{20} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15} + 7\sqrt{3}} a_{20} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5} + 7} a_{20} = \frac{2(7 - \sqrt{5})}{49 - 5} a_{20} = \frac{2(7 - \sqrt{5})}{44} a_{20} = \boxed{\frac{7 - \sqrt{5}}{22} a_{20}}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{y = \frac{7 - \sqrt{5}}{22} a_{20}} \qquad (5)$$

Este valor de "y" justifica el expresado en el enunciado de este ejercicio.

Puede obtenerse también el valor de "y" en función de r_{ec}^{20} (dato de este modelo) sustituyendo $a_{20} = 2\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}$ (valor que obtendremos posteriormente). Así pues, será:

$$\boxed{y} = \frac{7 - \sqrt{5}}{22} a_{20} = \frac{7 - \sqrt{5}}{22} \times 2\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{7 - \sqrt{5}}{11} \times \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(7 - \sqrt{5})^2}{10 \times 11^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(49 + 5 - 14\sqrt{5})}{10 \times 11^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(54 - 14\sqrt{5})}{10 \times 11^2}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(27 - 7\sqrt{5})}{5 \times 11^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{135 - 27\sqrt{5} - 35\sqrt{5} + 35}{5 \times 11^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{170 - 62\sqrt{5}}{5 \times 11^2}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{170 - 62\sqrt{5}}{605}}\, r_{ec}^{20}}$$



Su valor numérico, será pues:

$$\boxed{y} = \sqrt{\frac{170 - 62\sqrt{5}}{605}} \times 110 \cong 0,22\ 76\ 86\ 11\ 6\ldots \times 110 \cong \boxed{25,0 \text{ mm}}$$

2.2) Distancia "x" que fija la posición del plano secante "π_2" en la truncadura de vértices.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro generador, de la fórmula (3) deducida en M-35.10

$$x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)} a_n \qquad (3)$$

Los valores a sustituir en esta fórmula, son los siguientes (ver párrafo 2.1)

a) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

b) $\cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{60°}{2} = \cos^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ (Ver G.P. 1006)

c) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$ (Ver G.P. nº .... - Lámina 5) Tendremos pues:

$$\boxed{x} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} + \sqrt{3} \right)} a_{20} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{6} \right)} a_{20} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15} + 7\sqrt{3}}{2}} a_{20} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{15} + 7\sqrt{3}} a_{20} = \frac{4}{\sqrt{5} + 7} a_{20} = \frac{4(7 - \sqrt{5})}{49 - 5} a_{20} =$$

UNE A4 210 x 297

Enero 1982

$$= \frac{4 \times (7-\sqrt{5})}{44} a_{20} = \boxed{\frac{7-\sqrt{5}}{11} a_{20}}$$ De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{x = \frac{7-\sqrt{5}}{11} a_{20}} \qquad (6)$$

De la comparación de las fórmulas (6) y (5), se obtiene de inmediato que " $x = 2y$ ".

Valor de "x" en función de r_{ec}^{20} (dato de este modelo,) (ver valor de "y" en párrafo 2,1). Tendremos:

$$\boxed{x} = 2y = \boxed{2 \times \sqrt{\frac{170 - 62\sqrt{5}}{605}}\ r_{ec}^{20}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{x} = 2 \times \sqrt{\frac{170 - 62\sqrt{5}}{605}} \times 110 \cong 0,45\,53\,72\,23\,2\ldots \times 110 = \boxed{50,1 \text{ mm}}$$

---

3) CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

3.1) Arista "a_{20}" en función de "r_{ec}^{20}"

Su valor se obtiene de la fórmula " $r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a_{20}$ ", deducida en el ejercicio G.E. nº--- - Lámina 5.- Despejando en ella "a_{20}", tendremos:

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1982

Modelo M - 38.6

$$\boxed{a_{20}} = r_{ee}^{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} r_{ee}^{20} = \frac{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}} r_{ee}^{20} =$$

$$= \frac{2\times\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{5+\sqrt{5}} r_{ee}^{20} = 2\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})^2}} r_{ee}^{20} = 2\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} r_{ee}^{20} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{20}} r_{ee}^{20} = \boxed{2\times\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ee}^{20}}$$

Valor que hemos aplicado en los párrafos 2.1) y 2.2)

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_{20}} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times 110 \cong 1{,}05\ 14\ 62\ 22\ 4\ldots \times 110 \cong \boxed{115{,}7 \text{ mm}}$$

3.11) ICOSAEDRO REGULAR GENERADOR, DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura nº 1 del ejercicio M - 5.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura nº 2 del ejercicio M - 5.102

UNE A4 210 x 297

[signature] Enero 1982

3.2) ARQUIMEDIANO VI (NÚCLEO DEL ICOSAEDRO GENERADOR) DE CARAS MACIZAS, INCLUÍDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL ICOSAEDRO GENERADOR A LAS CARAS PENTAGONALES DEL ARQUIMEDIANO VI.

3.21) Longitud "a_{VI}^{20}" de la arista del Arquimediano VI, engendrado por el icosaedro generador "P_{20}"

Se obtiene, en función de la arista "a_{20}" del icosaedro generador, de la fórmula (1), deducida en el modelo M - 35,10

$$a_A = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \, a_n \qquad (1)$$

Los valores a sustituir en esta fórmula, son los siguientes (ver párrafo 2.1)

a) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

b) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$ (Ver G.P. nº.... - Lámina 5).

Tendremos pues sustituyendo estos valores en (1)

$$a_A = \boxed{a_{VI}^{20}} = \frac{\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} + \sqrt{3}} \, a_{20} = \frac{1}{1 + \sqrt{3} : \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}} \, a_{20} =$$

UNE A4 210 x 297

		Modelo M - 38.6

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}}\, a_{20} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{15} + \sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}}\, a_{20} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{7\sqrt{3} + \sqrt{15}}\, a_{20} =$$

$$= \frac{(\sqrt{15} + \sqrt{3})(7\sqrt{3} - \sqrt{15})}{147 - 15}\, a_{20} = \frac{7\sqrt{45} + 21 - 15 - \sqrt{45}}{132}\, a_{20} =$$

$$= \frac{6\sqrt{45} + 6}{132}\, a_{20} = \frac{18\sqrt{5} + 6}{132}\, a_{20} = \boxed{\frac{3\sqrt{5} + 1}{22}\, a_{20}}$$

De donde se obtiene finalmente.

$$\boxed{a_{VI}^{20} = \frac{3\sqrt{5} + 1}{22}\, a_{20}}$$

Para obtener el valor de "a_{VI}^{20}" en función de Γ_{ec}^{20} (dato de este ejercicio) sustituiremos el valor de "$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\Gamma_{ec}^{20}$" en la anterior fórmula, cuya espresión ha sido obtenida en el párrafo 3.1). Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_{VI}^{20}} = \frac{3\sqrt{5} + 1}{22}\, a_{20} = \frac{3\sqrt{5} + 1}{22} \times 2\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{3\sqrt{5} + 1}{11}\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\, \Gamma_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(3\sqrt{5} + 1)^2}{10}}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(45 + 1 + 6\sqrt{5})}{10}}\, \Gamma_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(46 + 6\sqrt{5})}{10}}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(23 + 3\sqrt{5})}{5}}\, \Gamma_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{115 - 23\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 15}{5}}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{100 - 8\sqrt{5}}{5}}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{4(25 - 2\sqrt{5})}{5}}\, \Gamma_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{11}\sqrt{\frac{25 - 2\sqrt{5}}{5}}\, \Gamma_{ec}^{20}}$$

Su valor numérico será pues:

UNE A4 210 x 297

[signature] Enero 1982

Modelo M- 38.6

$$\boxed{a^{20}_{VI}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{25-2\sqrt{5}}{5}} \times 110 \cong 0{,}36\,84\,03\,87\,5\ldots \times 110 \cong \boxed{40{,}5 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

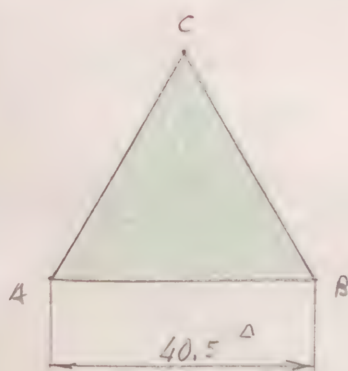


Figura 1

La forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 3 20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 30 unidades

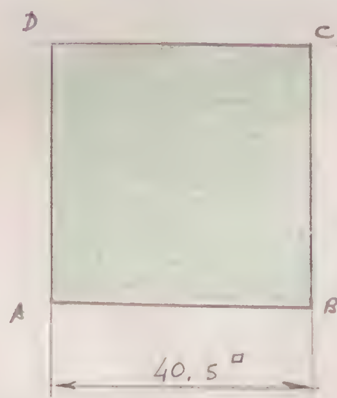


Figura 2

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 4 30 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

UNE A4 210 x 297

Calvarez Enero 1982

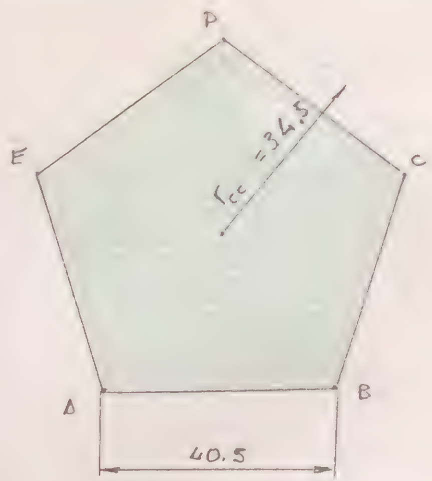


Figura 3

PIEZA Nº 5

12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

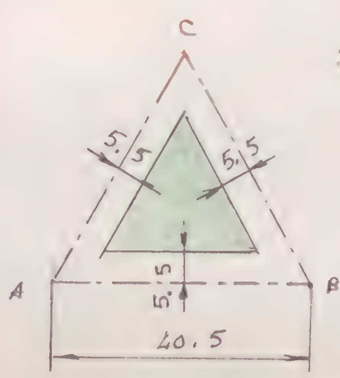


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 6 20 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS 30 unidades

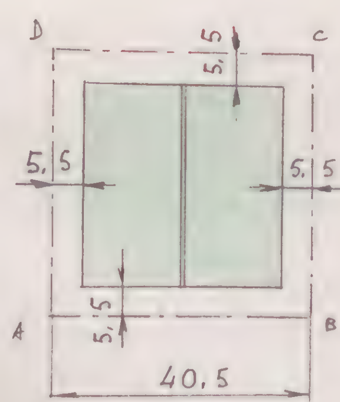


Figura 5

La forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 30 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

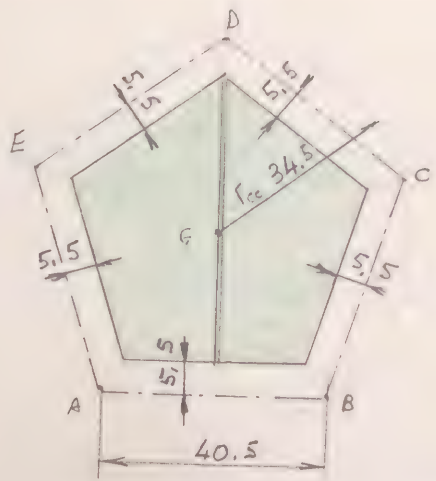


Figura 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura 6.

PIEZA Nº 8 12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 9 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS 60 unidades

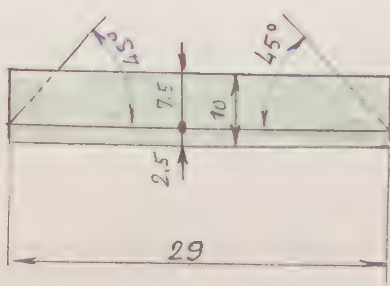


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación, en la figura 5.

PIEZA Nº 9 60 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 REFUERZO NORMAL EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 60 unidades.

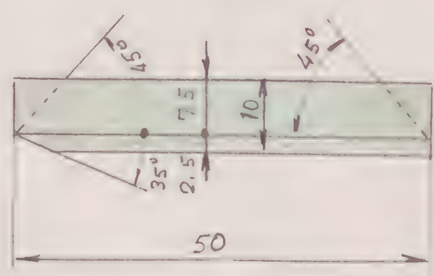


Figura 8

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación en la figura 6.

PIEZA Nº 10 60 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA PENTAGONAL 60 unidades

Modelo M - 38. 6

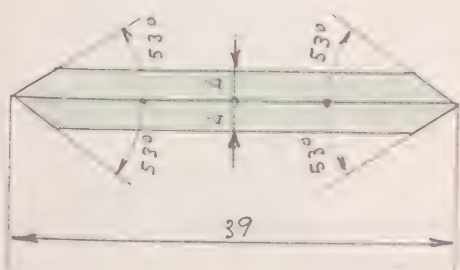


Figura 9

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 11 60 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 12 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA TRIANGULAR 60 unidades

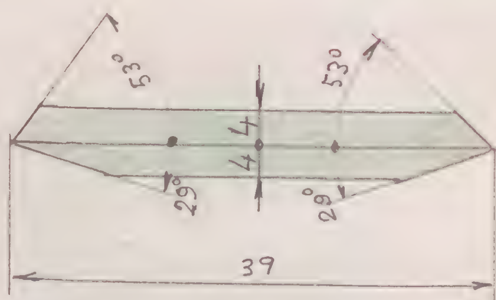


Figura 10

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 12 60 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 13 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

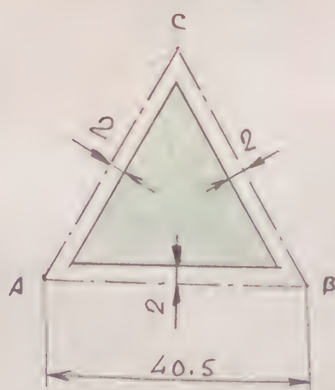


Figura 11

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 13 20 (u)

Figura 11

PIEZA Nº 14 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS 30 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 12.

UNE A4-210 x 297

Alvarez Enero 1982

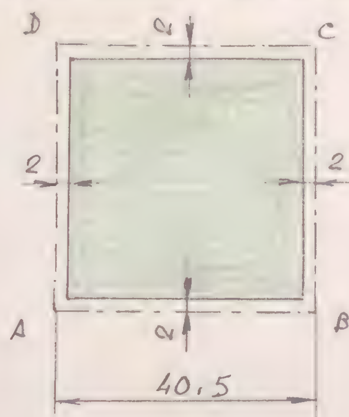


Figura 12

PIEZA Nº 14

30 (u)

Figura 12

PIEZA Nº 15 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

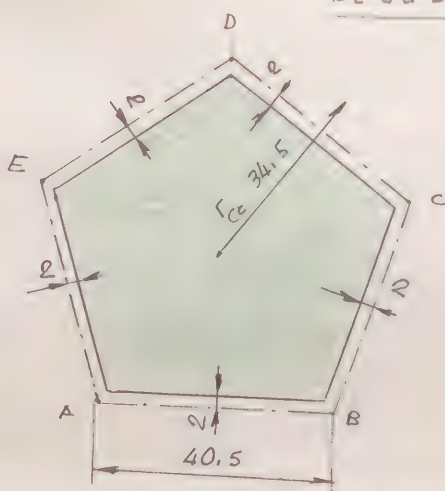


Figura 13

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono AB.. CDE de la figura 3, y se detallan en la figura 13

PIEZA Nº 15 12 (u)

Figura 13

2.22) Arista lateral "a_l" de las pirámides auxiliares pentagonales regulares, que fijan la posición de los vértices del icosaedro generador, con respecto al Arquimediano VI.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del icosaedro generador, de la fórmula (4), deducida en M-35.10

$$a_l = \frac{5 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)} a_n \qquad (4)$$

Modelo M-38.6

Los valores a sustituir en esta fórmula, son los siguientes: (ver párrafo 2.1):

a) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

b) $\cos \frac{\beta}{2} = \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ver ejercicio G.P. 1006)

c) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$ (Ver G.P. nº.... - Lámina 5) Tendremos pues:

$$\boxed{a_l} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} + \sqrt{3} \right)} a_{20} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{6} \right)} a_{20} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{15} + 7\sqrt{3}}{6}} a_{20} = \frac{6}{\sqrt{15} + 7\sqrt{3}} a_{20} = \frac{6 \times (7\sqrt{3} - \sqrt{15})}{147 - 15} a_{20} =$$

$$= \frac{6 (7\sqrt{3} - \sqrt{15})}{132} a_{20} = \boxed{\frac{7\sqrt{3} - \sqrt{15}}{22} a_{20}}$$

de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{a_l = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{15}}{22} a_{20}} \qquad (6)$$

Para obtener "a_l" en función de r_{ec}^{20} (dato del ejercicio) sustituiremos "$a_{20} = 2 \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20}$" valor obtenido en el párrafo 3.1

$$\boxed{a_l} = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{15}}{22} \times 2 \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20} = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{15}}{11} \times \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11} \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(7\sqrt{3} - \sqrt{15})^2}{10}} r_{ec}^{20} = \frac{1}{11} \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(147 + 15 - 14\sqrt{45})}{10}} r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11} \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(162 - 42\sqrt{5})}{10}} r_{ec}^{20} = \frac{1}{11} \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(81 - 21\sqrt{5})}{5}} r_{ec}^{20} =$$

UNE A4 210 x 297

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})(27-7\sqrt{5})}{5}}\; r_{ee}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{3\times(135-27\sqrt{5}-35\sqrt{5}+35}{5}}\; r_{ee}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{3\times(170-62\sqrt{5})}{5}}\; r_{ee}^{20} = \boxed{\frac{1}{11}\sqrt{\frac{510-186\sqrt{5}}{5}}\; r_{ee}^{20}}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{d_l = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{510-186\sqrt{5}}{5}}\; r_{oc}^{20}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{d_l} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{510-186\sqrt{5}}{5}} \times 110 \cong 0{,}39\,43\,63\,92\,8\ldots \times 110 \cong \boxed{43{,}4 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 16 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES, RECTAS, PENTAGONALES.

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 14.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$

PIEZA Nº 16

12 (u)

Figura 14

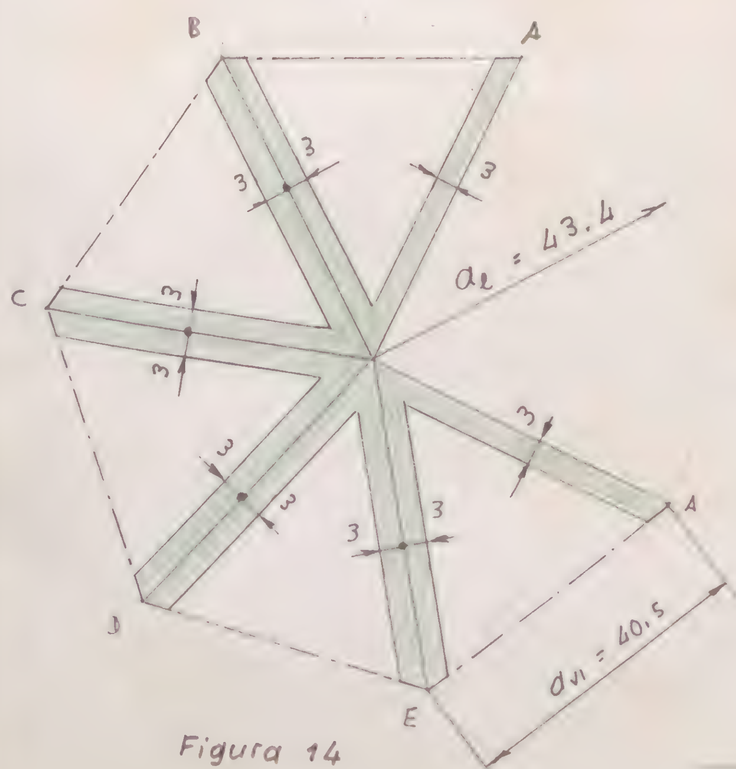


Figura 14

Alvarez Enero 1982

UNE A4 210 x 297



MODELO M - 38.6

Patrones



20(u)
caras

12(u)

12

30 (u)
caras

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS SEMI-REGULARES CONVEXOS, O "POLIEDROS ARQUIMEDIANOS"

ESTUDIO PREVIO A LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MISMOS.- DEFINICIONES.- PROPIEDADES.- PROCESOS DE OBTENCIÓN DE LOS MISMOS, DERIVÁNDOLOS DE LOS CINCO POLIEDROS REGULARES CONVEXOS REPRESENTADOS EN LAS LÁMINAS 1 A 5.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 39.1

ENUNCIADO PREVIO.- Introducción a los modelos sobre poliedros semi-regulares convexos, o "POLIEDROS ARQUIMEDIANOS".- Estudio preliminar a la construcción de los mismos.- Definiciones.- Propiedades.- Procesos de obtención de los mismos, derivándolos de los cinco poliedros regulares convexos. representados en las láminas 1 a 5.

1) GENERALIDADES

En el estudio del modelo M-1.1, hemos definido los poliedros convexos en general; sus elementos componentes, y los conceptos de poliedros convexos o cóncavos.

También hemos estudiado y definido los poliedros convexos regulares de los cinco únicos existentes, así como las propiedades de los mismos.

En el estudio del modelo M-48.1, también hemos estudiado y definido los poliedros cóncavos regulares y estrellados de los cuatro únicos existentes, así como las propiedades de ellos.

En este estudio previo al modelo M-39.5 definiremos y estudiaremos los denominados poliedros semi-regulares convexos, o también POLIEDROS ARQUIMEDIANOS.

2) DEFINICIONES DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Los poliedros arquimedianos denominados también poliedros semi-regulares, son poliedros convexos, cuyas caras laterales son polígonos regulares convexos (pero no del mismo número de lados), y sus ángulos sólidos son todos iguales o simétricos, concurriendo en cada vértice un cierto número de caras, dispuestas en un cierto orden cíclico.

Las caras son tan sólo de dos o tres tipos, y los ángulos sólidos son o triedros, o tetraedros o pentaedros

Los poliedros arquimedianos, han sido estudiados en los ejercicios G.E. nºs .... Láminas 33 a 47. La posibilidad de su existencia se analiza partiendo de los ángulos sólidos que se pueden formar acoplando polígonos regulares convexos alrededor de un vértice, de modo que la suma de los ángulos internos de los mismos sea inferior a 2π. Por consiguiente las caras sólo pueden ser de dos o tres tipos de polígonos, ya que la suma de ángulos de cuatro tipos distintos de polígonos regulares de "n" lados ($n = 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$), es mayor de 360°.

3. PROPIEDADES DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

De acuerdo con la definición de POLIEDRO ARQUIMEDIANO, se deducen las condiciones de existencia y propiedades geométrico-analíticas de estos poliedros, entre las cuales destacamos las siguientes.

3.1 Las aristas de todo arquimediano, son todas iguales

UNE A4 210 x 297



entre sí.

3.2 El número de sus caras varía desde cinco a infinitas

3.3 En todo arquimediano, existe una esfera de radio r_{ec} que contiene todos sus vértices (esfera circunscrita)

3.4 En todo arquimediano, existe una esfera de radio r_{e-tga} que es tangente a todas sus aristas en sus puntos medios, y concéntrica con la definida en 3.3.

3.5 En todo arquimediano, existe una esfera de radio "r_{ei}" tangente a todas las caras de igual forma y número de lados (esfera inscrita) y concéntrica con las definidas en 3.3 y 3.4.

3.6 En todo arquimediano existirán tantas esferas inscritas, de radios diferentes, como polígonos regulares distintos formen su superficie, todas concéntricas con las definidas en 3.3, 3.4 y 3.5.

3.7 En todo arquimediano, el radio de sus esferas inscritas, es máximo en las caras triangulares equilares, y disminuye gradualmente al aumentar el número de lados de las caras poligonales regulares.

3.8 Si en una arista de un poliedro arquimediano

concurren dos caras de igual ó diferentes tipos, el ángulo diedro formado por ambas, es igual al que forman en otras aristas dos caras de los mismos tipos mencionados anteriormente.

3.9 No todos los diedros de un arquimediano son iguales.

4. CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Los poliedros arquimedianos, se clasifican en los siguientes grupos:

4.1 GRUPO 1º, formado por trece poliedros individuales y diferentes, designados como ARQUIMEDIANOS I AL XIII

4.2 GRUPO 2º, formado por infinitos poliedros diferentes que tienen dos caras en forma de polígonos regulares convexos de n lados, y las restantes son triángulos equiláteros. Los poliedros de este grupo se designan como "ANTPRISMAS de la Serie A_n" ($n = 3, 4, 5, \ldots \infty$).

4.3 GRUPO 3º, formado por infinitos poliedros diferentes en forma de prismas rectos regulares, cuyas

Modelo M-39.1

bases son polígonos regulares convexos de n lados, y las caras laterales son cuadradas. Los poliedros de este Grupo se designan como "PRISMAS de la Serie B_n" (n = 3, 4, 5 .... ∞).

Los trece arquimedianos del Grupo 1º, o ARQUIMEDIANOS I, II, III ... XIII, han sido estudiados gráfica y analíticamente en los ejercicios G.E. nºs.... Láminas 33 a la 45, y representados en las vistas principal, superior y lateral izquierda, en dichas láminas, a escala 1:1, siendo el radio r_{ec} de su esfera circunscrita en todos ellos, de 55 mm.

Los infinitos arquimedianos del Grupo 2º, designados como "Antiprismas A_n", han sido estudiados en general en el ejercicio "G.E. nº.... Lámina 46" y representado el caso particular $n = 7$, como ejemplo (los polígonos de sus bases son eptágonos), en sus vistas principal, superior y lateral izquierda, en la mencionada lámina, a escala 1:1, siendo el radio r_{ec} de su esfera circunscrita, de 55 mm

Los infinitos arquimedianos del Grupo 3º, designados como "PRISMAS B_n", han sido estudiados en general en el ejercicio "G.E. nº ... Lámina 47" y representado el caso particular $n = 9$, como ejemplo (los polígonos de sus bases son eneágonos), en sus vistas principal, superior y lateral izquierda, en la mencionada lámina, a escala 1:1,

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1980

siendo el radio r_0 de su esfera circunscrita, de 55 mm.

5. PROCESOS DE OBTENCIÓN DE LOS ARQUIMEDIANOS

Los trece arquimedianos del Grupo 1°; el A_3 del Grupo 2° y el B_4 del Grupo 3°, pueden derivarse por procesos diferentes, de los cinco poliedros regulares convexos (Tetraedro, Exaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro), lo cual no sucede con los infinitos restantes de los Grupos 2° y 3°.

Los procesos de obtención, aplicables a los cinco poliedros regulares convexos, los enumeramos a continuación, y estudiaremos y utilizaremos sistemáticamente. Estos son los siguientes:

5.1 Por truncadura de vértices del poliedro generador (poliedro regular convexo P_n; ($n = 4, 6, 8, 12$ ó 20)

5.2 Por truncadura paralela de aristas del poliedro generador, seguido de truncadura de vértices del mismo (o viceversa)

5.3 Por truncadura oblicua de aristas del poliedro generador, seguido por truncadura de vértices del mismo (o viceversa)



5.4 Por intersección de dos poliedros regulares conjugados: (Tetraedro- tetraedro; exaedro octaedro; y dodecaedro- -icosaedro).

En todos los modelos que estudiaremos posteriormente para la realización de los Arquimedianos, derivados de los cinco poliedros regulares convexos, por los procesos anteriores, tomaremos como base de cálculo y dato único, el del radio "r_{ec}^{n}" de la esfera circunscrita al poliedro generador, haciendo r_{ec}^{n} = 110 mm para n = 4, 6, 8, 12 y 20. Este radio será también el de la esfera circunscrita al Arquimediano, cuando se proyecte el modelo del mismo, directamente.

UNE A4 210 x 297

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS, "ARQUIMEDIANO VII", FORMADO POR CUATRO CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3), Y CUATRO CADAS EXAGONALES REGULARES (C_6), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1 C_3 + 2 C_6$.

Radio de su esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 39.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas, "Arquimediano VII", formado por cuatro caras triangulares regulares (C_3). y cuatro caras escagonales regulares, (C_6), concurriendo en cada vértice $1C_3 + 2C_6$.

Este poliedro, ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G. E. nº .- Lámina 39, y representado en sus vistas principal. superior y lateral izquierda en la mencionada Lámina 39, a escala 1:1, con el radio r_{ec}^{VII} de su esfera circunscrita de $r_{ec}^{VII} = 55$ m m.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita

$$r_{ec}^{VII} = 110 \text{ m m}$$

Las características geométricas del Arquimediano VII, son las siguientes:

Número de caras triangulares ———	$C_3 = 4$
Número de caras escagonales ———	$C_6 = 4$
Número de vértices ———	$V = 12$
Número de aristas ———	$A = 18$
Número de caras de un ángulo sólido: $1C_3 + 2C_6$ ———	

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Abril 1980

Para poder obtener el despiece de este poliedro, calculemos previamente la longitud de la arista a^{VII} del mismo, en función del radio r_{ec}^{VII} de su esfera circunscrita. Para ello utilizaremos la fórmula

$$r_{ec}^{VII} = \frac{\sqrt{22}}{4} a^{VII} \qquad (1)$$

deducida en el mencionado ejercicio G.E. nº.- Lám 39, que nos da el valor del radio r_{ec}^{VII} en función de a^{VII}. Despejando en (1) a^{VII}, tendremos:

$$a^{VII} = \left[1 : \frac{\sqrt{22}}{4}\right] r_{ec}^{VII} = \frac{4}{\sqrt{22}} \times r_{ec}^{VII} = \sqrt{\frac{16}{22}}\, r_{ec}^{VII} = \sqrt{\frac{8}{11}}\, r_{ec}^{VII} \cong$$

$\cong 0,85\ 28\ 02\ 86\ 5\ldots\ r_{ec}^{VII}$ de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{a^{VII} = \sqrt{\frac{8}{11}}\, r_{ec}^{VII}} \qquad (2)$$

Fórmula que, aplicada al caso estudiado, nos da

$$\boxed{a^{VII}} \cong \sqrt{\frac{8}{11}}\, r_{ec}^{VII} \cong 0,85\ 28\ 02\ 86\ 5\ldots \times 110 = \boxed{93.8\ \text{mm}}$$

Para la construcción de este poliedro son necesarias las siguientes piezas:

Modelo M-39.1

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES, REGULARES

4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

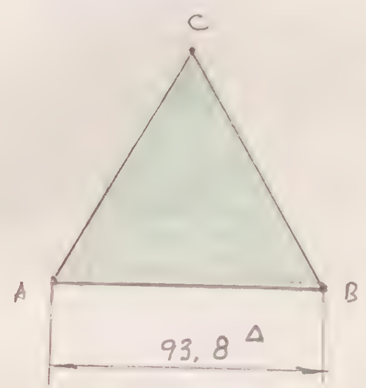


Figura 1

PIEZA Nº 1 4 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES, REGULARES

4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

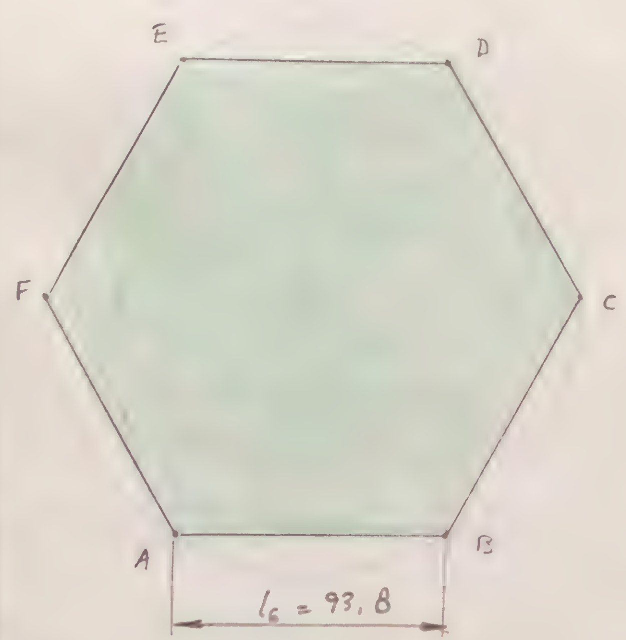


Figura 2

PIEZA Nº2 4 (u)

Figura 2

Calvarez Abril 1980

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 4 unidades

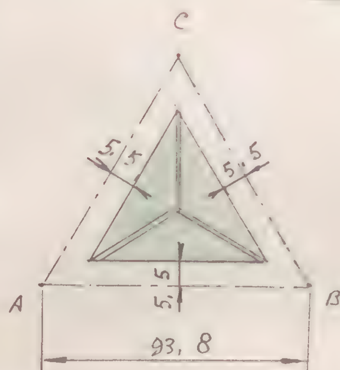


Figura 3

La forma y dimensiones se deducen de las del Triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2.

PIEZA Nº 3 4 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 4 unidades

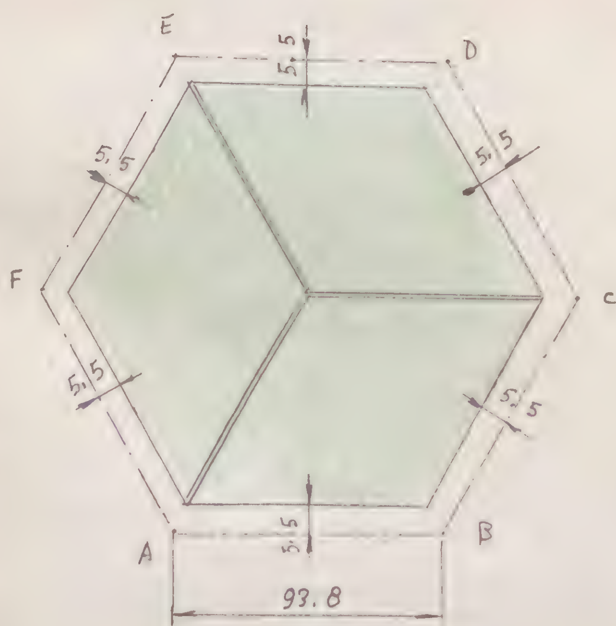


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular convexo A, B ..... E, F, de la figura 2, y se detallan en la figura 4.

PIEZA Nº 4

4 (u)

Figura 4

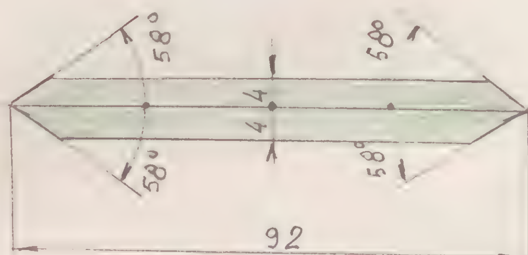
UNE A4 210 x 297

Calvane Abril 1980

		Modelo M-39.1

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS EXAGONALES CONTIGUAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5



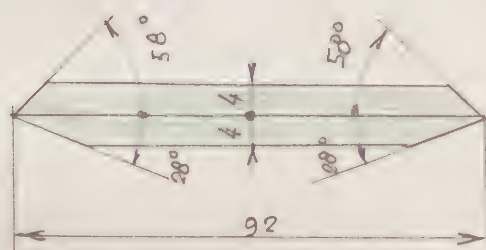
PIEZA Nº 5 6(u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA EXAGONAL CONTIGUAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES

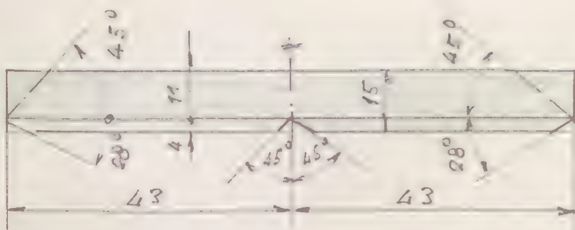
12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 3.

[firma] Abril 1980



Modelo M-39.1



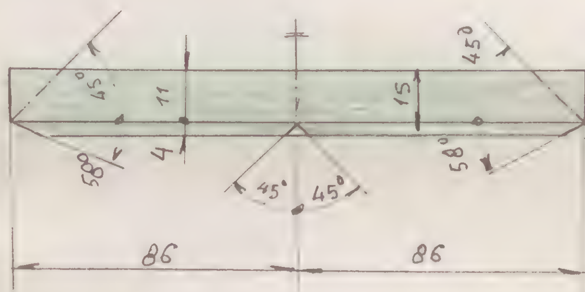
PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 7

Figura 7

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES. 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación en la figura 4



PIEZA Nº 8 12 (u)

Figura 4

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLODEADO EN CARAS TRIANGULARES, REGULARES 4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1 y se detallan en la figura 9.

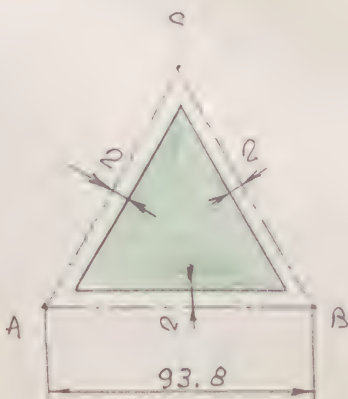


Figura 9

PIEZA Nº 9 4 (u)

Figura 9

UNE A4 210 x 297

Alvarez Abril 1980

Modelo M-39.1

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular convexo A,B,C... E,F. de la figura 2, y se detallan en la figura 10.

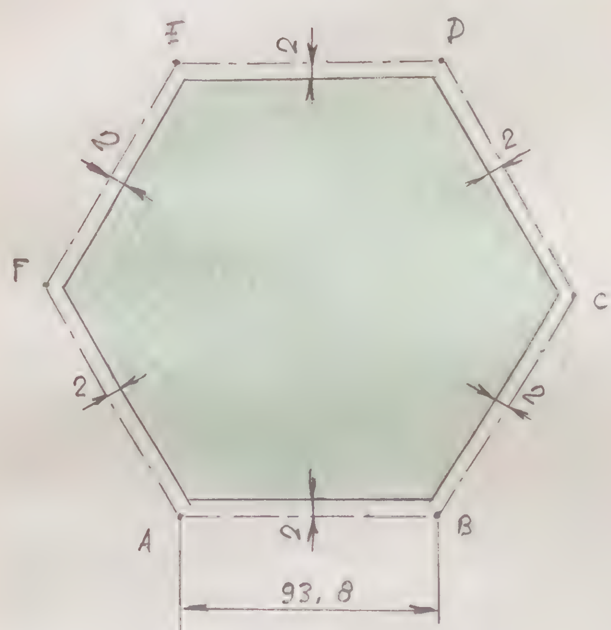


Figura 10

PIEZA Nº 9

4 (u)

Figura 10

Alvarez Abril 1980

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-39.2

EN PROYECTO

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS, "ARQUIMEDIANO VII", FORMADO POR CUATRO CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3), Y CUATRO CARAS EXAGONALES, REGULARES (C_6), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1 C_3 + 2 C_6$

Radio de su esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS.	Modelo M-39.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas, ARQUIMEDIANO VII, formado por cuatro caras triangulares regulares (C_3), y cuatro caras exagonales, regulares (C_6), concurriendo en cada vértice $1\ C_3 + 2\ C_4$.

Este modelo, puede considerarse como una variante del M - 39.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M. 39.1

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{VII} = radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{VII} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este poliedro son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES, TRIANGULARES, REGULARES 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A4 210 x 297

Abril 1980

Modelo M-39.2

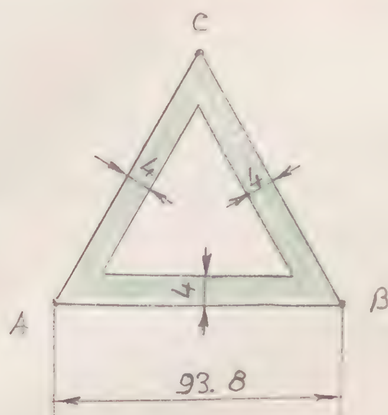


Figura 1

PIEZA N° 1

4(u)

Figura 1

PIEZA N° 2 CARAS LATERALES EXAGONALES, REGULARES.

4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

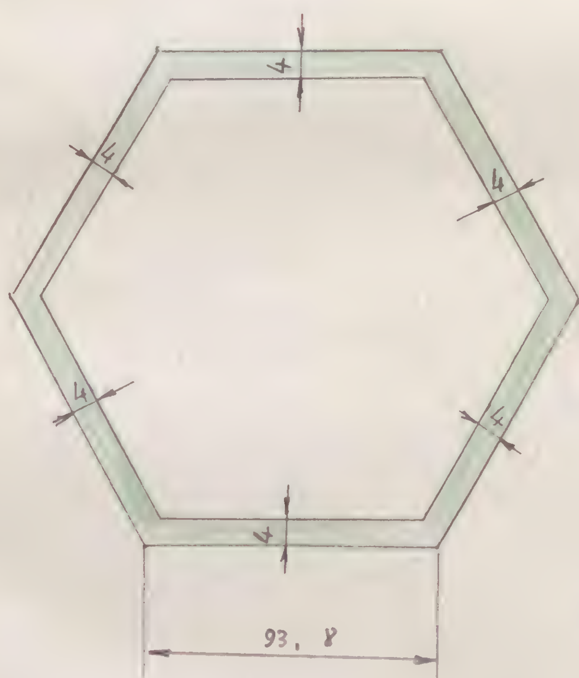


Figura 2

PIEZA N° 2

4(u)

Figura 2

PIEZA N° 3 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS EXAGONALES CONTIGUAS.

6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

UNE A4 210 x 297

Alvarez Abril 1980

Modelo M- 39.2

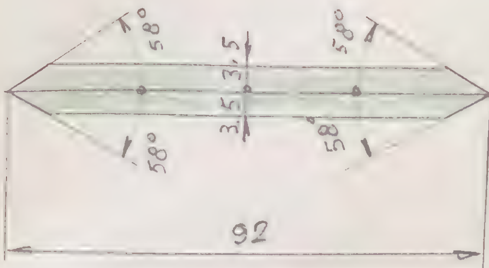


Figura 3

PIEZA Nº 3 6 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA EXAGONAL CONTIGUA

12 unidades

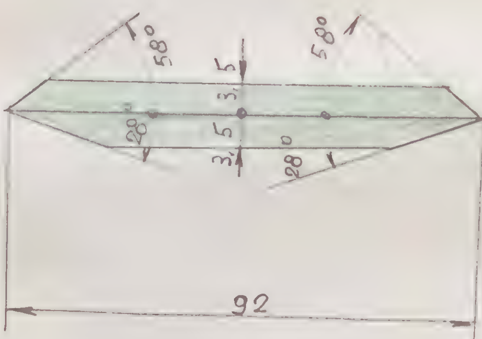


Figura 4

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Abril 1980

VARIANTE DEL MODELO M-39.1, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-39.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUMEDIANO VII", formado por cuatro caras triangulares regulares (C_3) y cuatro caras exagonales regulares (C_6), concurriendo en cada vértice $1C_3 + 2C_6$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-39.1 de igual forma, y siendo menor el radio de su esfera circunscrita. ($r_{ec} = 76.1$ mm).

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico hecho en el del modelo M-39.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción, $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ec}^{VII} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}$$

UNE A4 210 x 297

[signature] Abril 1980

		Modelo M- 39.3

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-39.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-39.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES, REGULARES. 4 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1 4 (u)	93.8	64,9

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES, REGULARES 4 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2 4 (u)	93.8	64.9

Modelo M-39.3

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 4 unidades

La figura 3 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas,

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3	93.8	64.9
4 (u)	5,5	5

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES, REGULARES 8 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	93,8	64,9
4 (u)	5,5	5

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS EXAGONALES CONTIGUAS 6 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	92	63
6(u)	4	4
	58°	58°

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA EXAGONAL CONTIGUAS.- 12 unidades.

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	92	63
12 (u)	4	4
	28°	28°
	58°	58°

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

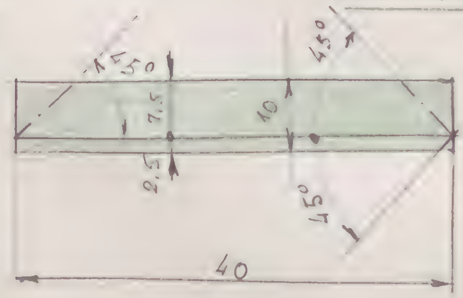


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en esta figura 7, que sustituye a la del mismo número del modelo M-39.1.- Su colocación será en dirección de la altura del triángulo equilátero PIEZA Nº 7 8(u) (Figura 7).

Calvarez Abril 1980



Modelo M-39.3

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 12 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 8 12 (u)	86	59
	4	2,5
	11	7,5
	15	10
	58°	58°
	45°	45°

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 4 unidades

La figura 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 9 4 (u)	93.8	64,9
	2	2

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 4 unidades

La figura 10, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas, iguales a las del cuadro de la pieza nº 9.

UNE A4 210 x 297

[signature] Abril 1980

VARIANTE DEL MODELO M-39.2,
DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO DE MENOR LONGITUD EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-39.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO VII", formado por cuatro caras triangulares regulares (C_3) y cuatro caras exagonales, regulares, (C_6), concurriendo en cada vértice $1 C_3 + 2 C_6$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-39.2, de igual forma y siendo menor el radio de su esfera circunscrita (r_{ec} = 76.1 mm).

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-39.2, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

4 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1	93.8	64.9
4 (a)	4	3.5

Modelo M-39.4

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES, REGULARES

4 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2	93.8	64.9
4 (4)	4	3.5

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS EXAGONALES, CONTIGUAS 6 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3	92	63
6 (4)	4	3.5
	58°	58°

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA EXAGONAL CONTIGUA.- 12 unidades

UNE A4 210 x 297

[signature] Abril 1980

Modelo M-39.4

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	92	63
	4	3.5
12 (a)	28°	28°
	58°	58°

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS SEMI-REGULARES CONVEXOS, O "POLIEDROS ARQUIMEDIANOS"

ESTUDIO PREVIO A LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MISMOS.- PROCESO DE TRUNCADURA DE VÉRTICES EN LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS REPRESENTADOS EN LAS LÁMINAS 1 a 5.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-39.5

ENUNCIADO: Estudio previo a la construcción de los poliedros Arquimedianos.- Proceso de obtención por el procedimiento de TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos.

1. GENERALIDADES

En la introducción al modelo M-39.1, en su párrafo 5. expusimos que los trece Arquimedianos del Grupo 1º; el A_3 del Grupo 2º (octaedro regular convexo y el B_4 del Grupo 3º (exaedro regular convexo) pueden derivarse por varios procesos, de los cinco poliedros regulares convexos.

Entre ellos, estudiamos y aplicamos en este ejercicio, el denominado "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de los poliedros regulares convexos o poliedros generadores.

2. DEFINICIONES

La operación geométrica denominada "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de un poliedro regular convexo, consiste en cortar todos los ángulos sólidos de sus vértices, por planos perpendiculares a los radios que unen dichos vértices con el centro O de su esfera circunscrita.

Estos planos recantes, dan lugar a la formación, en los ángulos sólidos, de polígonos planos que quedarían visibles, si

UNE A4 210 x 297

imaginamos retiradas las somas truncadas del poliedro generador comprendidas en el semiespacio del plano secante que contiene al vértice correspondiente.

Igualmente, los mencionados planos secantes, producen en las caras del poliedro generador otros nuevos polígonos planos situados en dichas caras con un contorno que se destaca claramente al retirar imaginaria o materialmente las mencionadas somas truncadas del poliedro generador.

Las dos clases de polígonos planos definidas anteriormente, que se producen en el poliedro generador por el proceso de "truncadura de vértices" pueden considerarse como caras superficiales del poliedro resultante al retirar las somas truncadas de los vértices en el poliedro generador.

Este poliedro resultante le denominaremos en lo sucesivo como poliedro núcleo del poliedro generador después de realizada la truncadura de los vértices del mismo.

Las propiedades y forma de este poliedro núcleo dependen de la posición del plano secante con respecto al poliedro generador y también de la clase de éste.

Este será el objeto principal del estudio general del proceso de TRUNCADURA DE VÉRTICES de un poliedro

regular convexo.

3. TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO

Consideremos (figura 1) un tetraedro regular convexo de vértices ABCD, siendo G el centro de su esfera circunscrita (centro de gravedad del tetraedro).

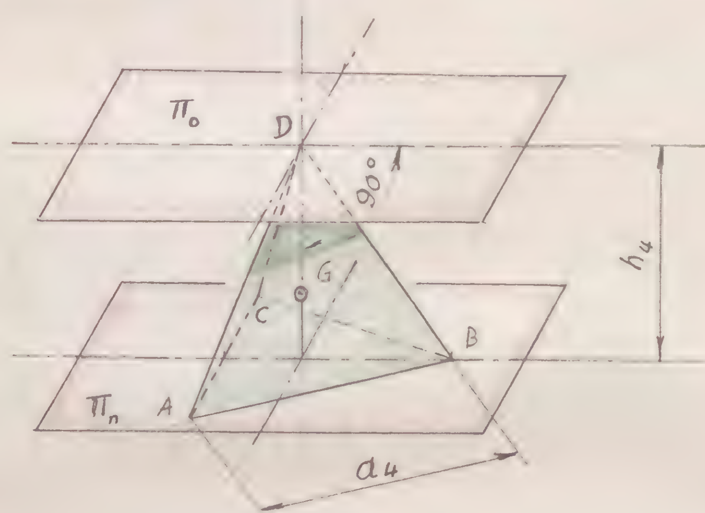


Figura 1

Unamos G con el vértice D, y tracemos por D el plano π_0, perpendicular a la recta GD, o radio de la esfera circunscrita que pasa por D.

Imaginemos ahora que el plano π_0 se mueve paralelamente a sí mismo en la dirección DG, hasta alcanzar la posición límite π_n, coincidente con el plano de la cara ABC, opuesta al vértice considerado D.

En las sucesivas posiciones el plano móvil π_0 irá produciendo una truncadura de vértices en el vértice considerado D, que completada con las de los vértices restantes del tetraedro generador nos formará en cada momento un poliedro núcleo variable, cuya forma y dimensiones dependen de la posición del



plano secante. Para fijar la posición de éste, consideremos que el mismo, corta a las tres caras del ángulo sólido concurrentes en D según rectas que forman un triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de las aristas del ángulo sólido con el plano secante. Dicho triángulo es equilátero, por ser sus vértices equidistantes de el vértice del ángulo sólido D considerado.

Los tres segmentos rectilíneos o distancias "x" entre los vértices del triángulo sección y el vértice D del ángulo sólido en que se produce la truncadura, fijan la posición del plano secante con respecto al tetraedro generador, en dicho vértice.

El poliedro núcleo resultante de la truncadura de los cuatro vértices del tetraedro generador a la misma distancia "x" tiene la forma y dimensiones que analizamos a continuación:

3.1 1ª POSICIÓN

POLIEDRO NÚCLEO RESULTANTE DE LA TRUNCADURA DE TODOS LOS VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO A LA DISTANCIA

$$0 < x < \frac{1}{3} a_4 \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta las consideraciones expuestas en el



		Modelo M-39.5

párrafo 2., el plano secante da lugar a la formación, en los ángulos sólidos, de triángulos equiláteros de lado "x" $(0 < x < \frac{1}{3}a_4)$, y en las caras ABC (fig. 2) del tetraedro generador de arista a_4, se formarán exágonos DEFGHI. Se demuestra fácilmente que estos exágonos son equiángulos (ángulos de 120°) y de lados alternativamente iguales

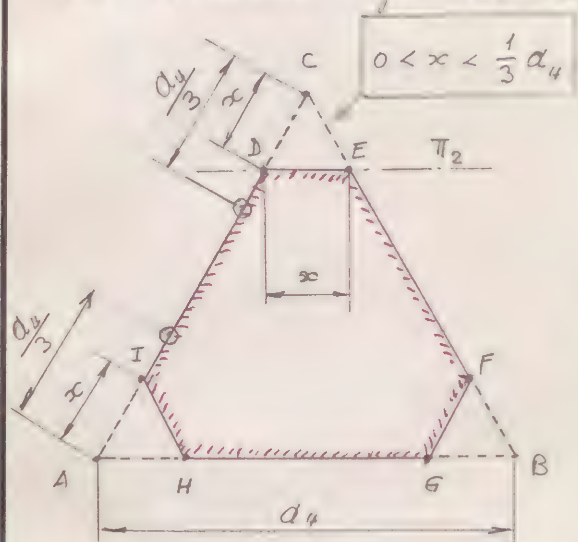


Figura 2

$$\overline{DE} = \overline{FG} = \overline{IH} = x$$

$$y \quad \overline{EF} = \overline{GH} = \overline{ID} = a_4 - 2x$$

siendo los primeros menores que los segundos. (exágonos no equiláteros y por tanto no regulares)

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, se deduce que el poliedro núcleo resultante, será un poliedro irregular convexo de las siguientes características:

1) Cuatro caras triangulares equiláteras de lado $l_3 = x$, obtenidas sobre el plano secante en la truncadura de los cuatro ángulos sólidos del tetraedro generador.

2) Cuatro caras exagonales equiángulas DEFGHI (fig. 2) sobre las caras del tetraedro generador, de lados $\overline{DE} = \overline{FG} = \overline{HI} = x$ y $\overline{EF} = \overline{GH} = \overline{ID} = a_4 - 2x$.

3) Número de vértices $= \frac{4 \times 6 + 4 \times 3}{3} = 12$ vértices

4) Número de aristas $= \frac{4 \times 6 + 4 \times 3}{2} = 18$ aristas

Modelo M-39.5

Como resumen de lo expuesto en el párrafo 3.1, tendremos:

RESUMEN

El poliedro núcleo resultante de la truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo a la distancia

$$0 < x < \frac{1}{3} a_4 \qquad 1^a \text{ POSICIÓN}$$

es un poliedro irregular convexo de las siguientes características:

1)	Número de caras triangulares regulares	= 4
2)	Número de caras oxagonales equiángulas	= 4
	Total caras =	8
3)	Número de vértices	V = 12
4)	Número de aristas	A = 18

MODELO DE ESTA PRIMERA POSICIÓN:

EN PROYECTO

Calvares Abril 1980



Modelo M-39.5

3.2 2º Posición

POLIEDRO NÚCLEO RESULTANTE DE LA TRUNCADURA DE TODOS LOS VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO A LA DISTANCIA

$$x = \frac{1}{3} d_4 \qquad (2)$$

Continuemos el estudio de la truncadura de vértices del tetraedro regular convexo, iniciado en los párrafos 3. y 3.1, cuando el plano secante pasa de la 1º posición a esta 2º en la que $x = \frac{1}{3} d_4$

Refiriéndonos a la figura 2, vemos que al aumentar la distancia x, se conservan todas las características del poliedro irregular convexo del núcleo, pero que al mismo tiempo van aumentando de forma continuada las longitudes de los lados menores $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{IH}$ del exágono equiángulo, y disminuyendo las longitudes de sus lados menores.

Así pues, existirá una posición tal en que se igualen ambas magnitudes, y el exágono será también equilátero, o sea regular.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{IH} = x, \\ \overline{EF} = \overline{GH} = \overline{ID} = d_4 - 2x \end{array} \right\}$$ Pero siendo

esto ocurrirá cuando sea $x = d_4 - 2x$; de donde



$d_4 = x + 2x = 3x$ y de aquí:

$$x = \frac{1}{3} d_4$$

Así pues, la truncadura de vértices del tetraedro regular convexo a la distancia $x = \frac{1}{3} d_4$ produce en las caras del tetraedro generador, exágonos regulares convexos, DEFGHI. (figura 3) de lado $x = \frac{1}{3} d_4$

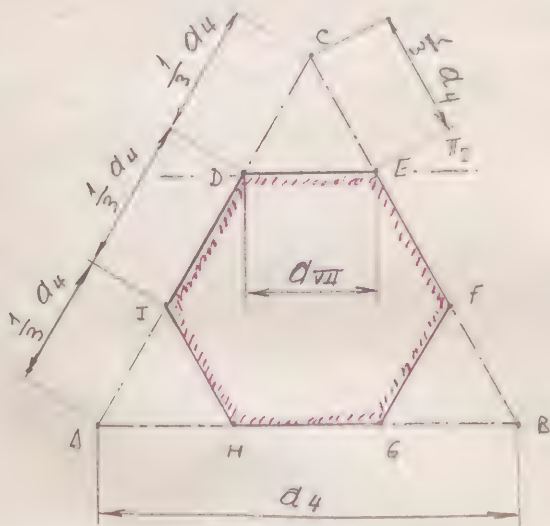


FIGURA 3

También los planos secantes de dichas troncaduras producen en los ángulos sólidos, triángulos equiláteros de igual lado $x = \frac{1}{3} d_4$

Por consiguiente, el poliedro núcleo resultante, será un poliedro convexo de las siguientes características:

1) Cuatro caras equiláteras triangulares de lado $l_3 = x = \frac{1}{3} d_4$

2) Cuatro caras exagonales regulares convexas de igual lado $l_6 = x = \frac{d_4}{3}$

3) Doce vértices $V = 12$

4) Diez y ocho aristas $A = 18$

5) En cada vértice concurren $1 C_3 + 2 C_6$

UNE A4 210 x 297

		Modelo M-39.5

Estas características son las mismas que las del ARQUIMEDIANO VII (ver modelo M-39.1) siendo la longitud de su arista a_{VII} el segmento $x = \frac{1}{3} a_4$

Como resumen de lo expuesto en el párrafo 3.2, tendremos:

RESUMEN

El poliedro núcleo resultante de la truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia

$$x = \frac{a_4}{3} \qquad 2^a \text{ Posición}$$

es: UN ARQUIMEDIANO VII DE ARISTA $a_{VII} = \frac{1}{3} a_4$

estudiado en el ejercicio G.E. nº ... .- Lámina 39.

Con los conceptos desarrollados en este párrafo 3.2 podemos construir el siguiente modelo M-39.5, correspondiente al enunciado explícito del mismo, que detallamos a continuación.

UNE A4 210 x 297

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO VII" OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_4", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA $\frac{a_4}{3}$.- EL ARQUIMEDIADO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro regular generador

$$r_{ec}'' = 110 \text{ m m.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 39.5

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO VII" obtenido por truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo de arista "a_4", a la distancia $x = \frac{a_4}{3}$. - El Arquimediano generado se construirá con las caras macizas, y el tetraedro generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ee}^4 = radio de la esfera circunscrita al tetraedro regular generador:

$$r_{ec}^4 = 110 \text{ mm}$$

En el resumen del párrafo 3.2 del ESTUDIO PREVIO a la construcción de este modelo M-39.5, por el proceso de TRUNCADURA DE VÉRTICES de un tetraedro regular convexo, obtuvimos la conclusión de que:

"EL ARQUIMEDIANO VII puede ser engendrado por la truncadura de los vértices de un tetraedro regular convexo a la distancia $x = \frac{a_4}{3}$, siendo la arista de dicho Arquimediano, $a_{VII} = x = \frac{a_4}{3}$"

El enunciado anterior nos permite la construcción del

UNE A4 210 x 297

modelo M - 39.5 que estudiamos, cuyo enunciado explícito se incluye al comienzo de este estudio.

Previamente calcularemos las siguientes magnitudes

1.- Arista "a_4" del tetraedro generador, en función del radio "r_{ec}^4" de su esfera circunscrita (dato del ejercicio).

Se deduce de la fórmula $r_{ec}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4$, deducida en el ejercicio G.E. nº .....- Lámina 1. Despejando en ella a_4, tendremos:

$$\boxed{a_4} = \frac{\sqrt{6}}{4} : r_{ec}^4 = \frac{4}{\sqrt{6}} \times r_{ec}^4 = \frac{4\sqrt{6}}{6} r_{ec}^4 = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4} \qquad (1)$$

2.- Arista a_{VII} del Arquimediano generado

Del enunciado resumen del párrafo 3.2 del ESTUDIO PREVIO, se deduce:

$$\boxed{a_{VII}} = \frac{a_4}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 : 3 = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{9} r_{ec}^4} \qquad (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) nos permiten calcular las magnitudes necesarias para la construcción de este modelo.

En el caso presente es $r_{ec}^4 = 110$ mm, por lo que ten-

UNE A4 210 x 297

Abril 1980

dremos:

$$\boxed{d_{IV}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\, r_{ee}{}^{IV} = 1.63\ 29\ 93\ 16\ 2 \ldots \times 110 \cong \boxed{179.6 \text{ mm}}$$

y también:

$$\boxed{d_{VII}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}\, r_{ee}{}^{V} = 0.54\ 43\ 31\ 05\ 4 \ldots \times 110 \cong \boxed{59.9 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

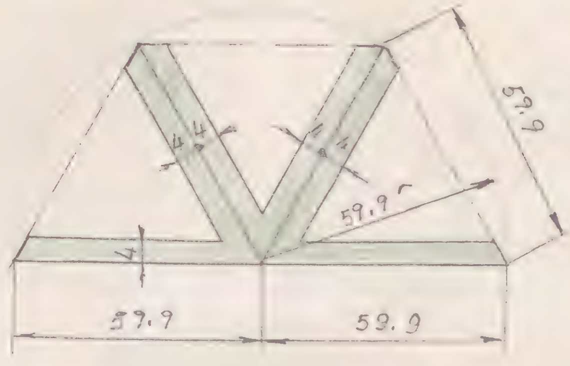
A) TETRAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

Queda reducido a cuatro pirámides triangulares, rectas, regulares, cuyo desarrollo lateral es el siguiente:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO LATERAL DE LAS CUATRO PIRÁMIDES TRUNCADAS 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

Modelo M-39.5

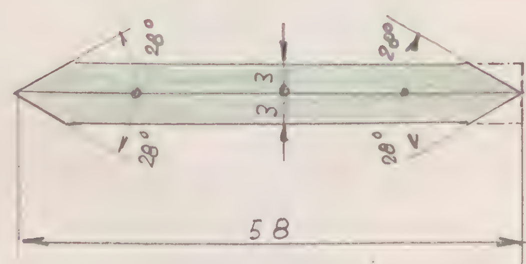


PIEZA Nº 1 4 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS LATERALES 12 unidades



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

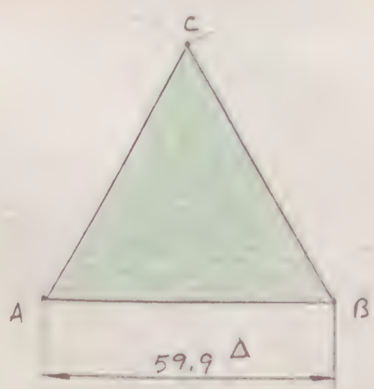
PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 4

B) ARQUIMEDIANO VII, ENGENDRADO, DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES, TRIANGULARES, REGULARES 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5



PIEZA Nº 3 4 (u)

Figura 5

Figura 5

Calvarese Abril 1980

Modelo M-39.5

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES, EXAGONALES, REGULARES, 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

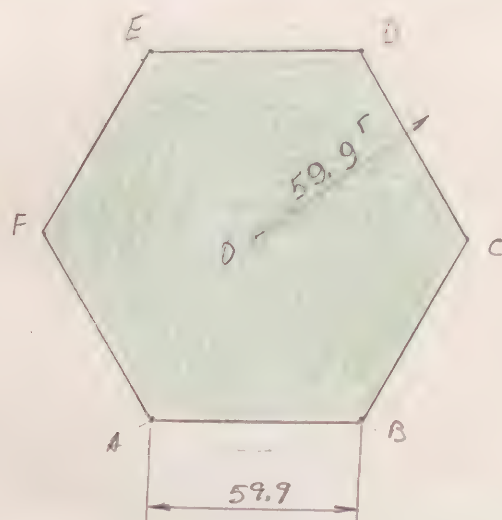


Figura 6

PIEZA Nº 4

4 unidades

Figura 6

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS SUPERFICIALES, TRIANGULARES REGULARES 4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de los del triángulo ABC de la figura 5, y se detallan en la figura 7

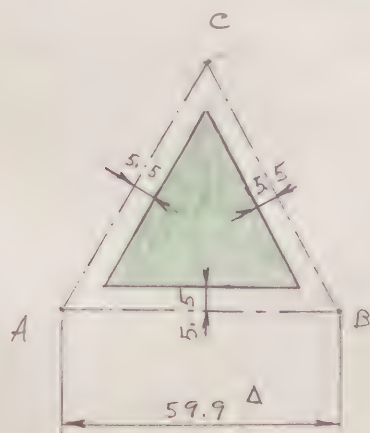


Figura 7

PIEZA Nº 5 4 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS SUPERFICIALES,

Modelo M - 39. 5

EXAGONALES REGULARES 4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 6, y se detallan en la fig. 8

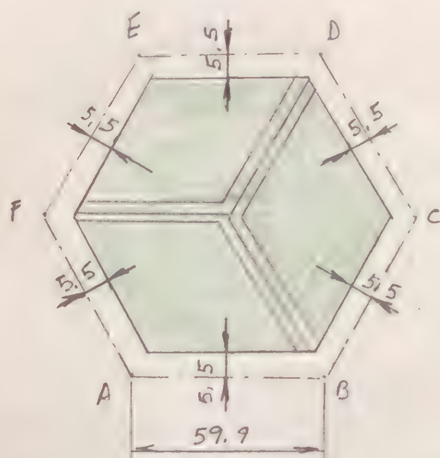


Figura 8

PIEZA Nº 6 4 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS SUPERFICIALES, EXAGONALES, REGULARES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9.

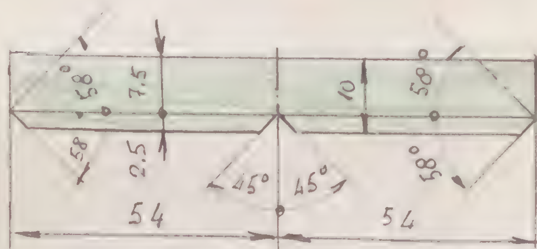


Figura 9

PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS EN CARAS EXAGONALES CONTIGUAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

Modelo M - 39.5

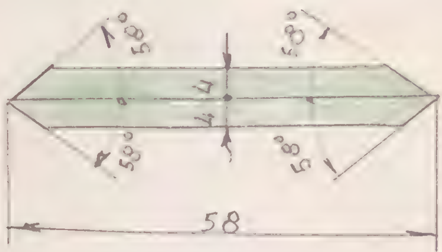


Figura 10

PIEZA N° 8 6 (u)

Figura 10

PIEZA N° 9 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA EXAGONAL CONTIGUAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

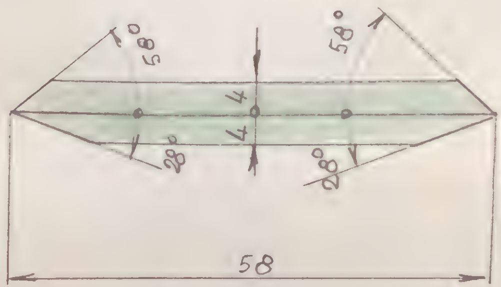


Figura 11

PIEZA N° 9 12 (u)

Figura 11

PIEZA N° 10 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES, REGULARES 4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 5, y se detallan en la figura 12

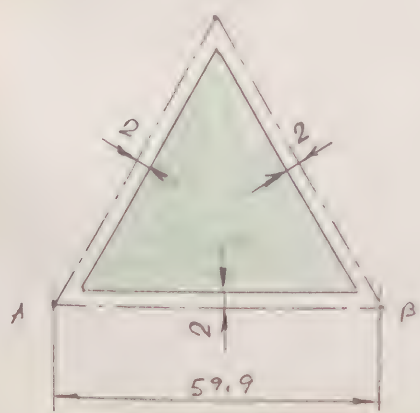


Figura 12

PIEZA N° 10 4 (u)

Figura 12

Alvarez Abril 1980

Modelo M- 39.5

PIEZA Nº 11 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES, REGULARES 4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 6, y se detallan en la figura 13.

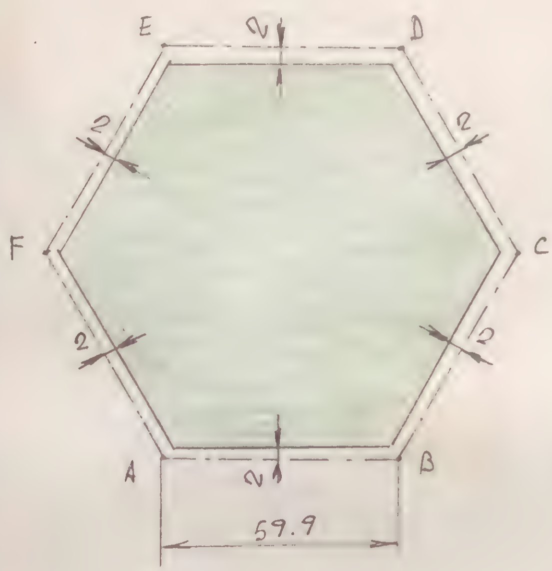


Figura 13

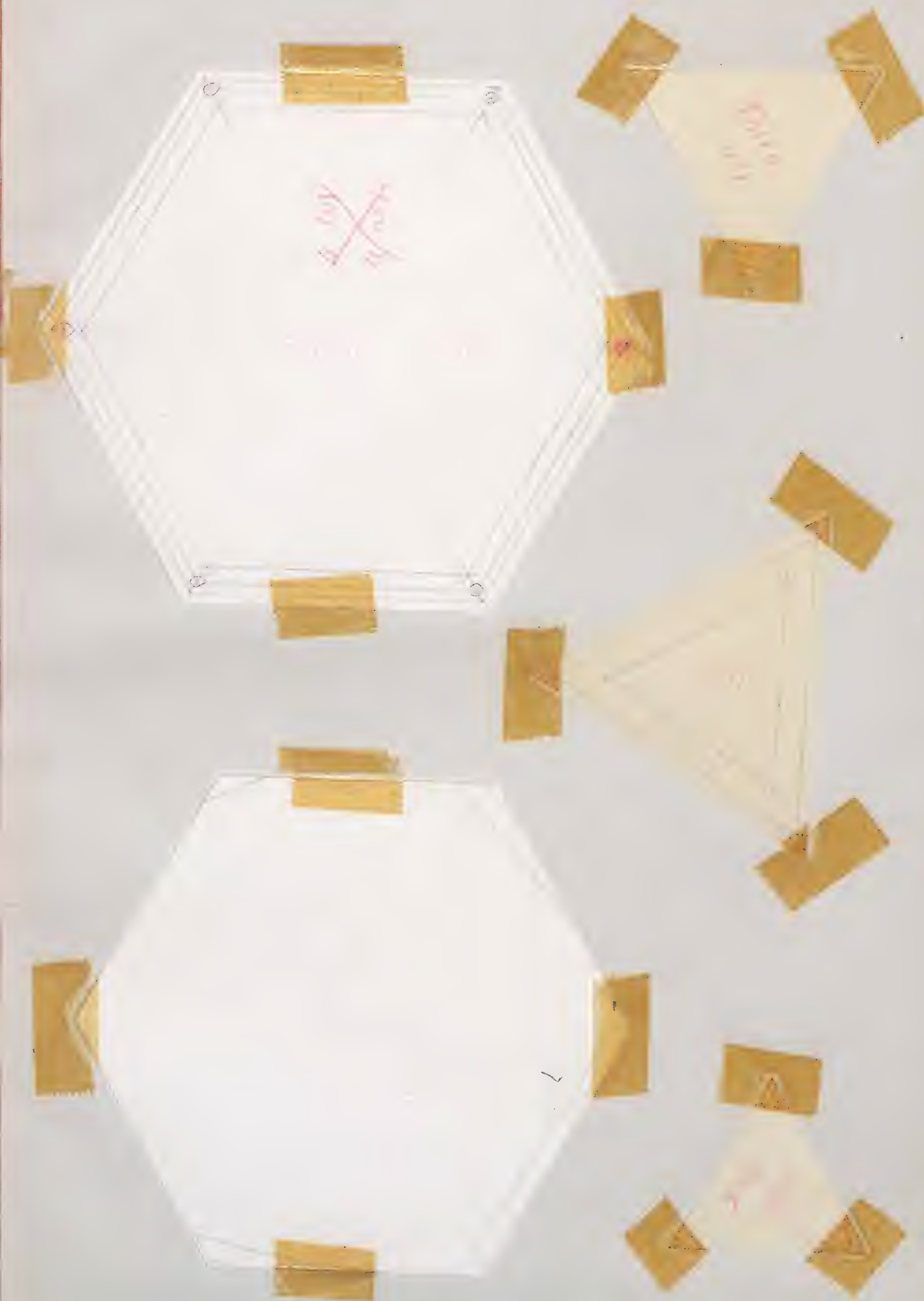
PIEZA Nº 11 4 (u)

Figura 13

UNE A4 210 x 297

C. Alvarez Abril 1980

MODELO M-39.5 PATRONES



VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-39.5, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, CUATRO PIRÁMIDES RECTAS, REGULARES, EXAGONALES, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS EXAGONALES DEL ARQUIMEDIANO VII GENERADO, Y POR VÉRTICES, LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL TETRAEDRO GENERADOR DE LOS CENTROS DE LAS CARAS EXAGONALES Y DESDE EL CENTRO "O" DEL POLIEDRO.

Radio de la esfera circunscrita

$r' = 110$ m m

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-39.6

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-39.5, cuatro pirámides rectas, regulares, exagonales, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras exagonales del Arquimediano VII generado, y por vértices, las proyecciones sobre la esfera circunscrita al tetraedro generador, de los centros de dichas caras exagonales, desde el centro "O" del poliedro.

Como se deduce del enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M.-39.5, al cual ha de añadirse cuatro pirámides de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación:

La altura "h_6" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^4" de la esfera circunscrita al tetraedro regular generador, y del radio "r_{ei}^{VII-6}" de la esfera inscrita tangente a las caras escagonales del Arquimediano generado. Así pues, será:

$$h_6 = r_{ec}^{4} - r_{ei}^{VII-6} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^4, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº -- Lám 1, en función de la arista a_4 del tetraedro generador. Su valor es

$$r_{ec}^{4} = \frac{\sqrt{6}}{4}\, a_4 \qquad (2)$$

UNE A4 210 x 297

		Modelo M-39.6

El radio "r_{ei}^{VII-6}" de la esfera tangente a las caras exagonales del Arquimediano VII, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº ... - Lámina 39. Su valor, en función de la arista "a_{VII}" de dicho Arquimediano, es:

$$r_{ei}^{VII-6} = \frac{\sqrt{6}}{4} a_{VII} \qquad (3)$$

y sustituyendo a_{VII} por su valor $a_{VII} = \frac{1}{3} a_4$ (ver fórmula (3) h 10 del modelo M-39.5, tendremos

$$r_{ei}^{VII-6} = \frac{\sqrt{6}}{4} a_{VII} = \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{1}{3} a_4 = \frac{\sqrt{6}}{12} a_4 \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_6 = r_{ec}^{4} - r_{ei}^{VII-6} = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4 - \frac{\sqrt{6}}{12} a_4 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{12}\right) a_4 =$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{6} - \sqrt{6}}{12}\right) a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{12} a_4 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_4$$

de donde se obtiene finalmente:

$$h_6 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_4 \qquad (5)$$

Sustituyendo a_4 por su valor $a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{4}$, en función del radio r_{ec}^{4} de la esfera circunscrita al tetraedro generador, obtenido en la hoja 11 del modelo M-39.5, tendremos:

$$h_6 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_4 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{4} = \frac{2 \times 6}{3 \times 6} r_{ec}^{4} = \frac{2}{3} r_{ec}^{4} \qquad (6)$$

UNE A4 210 x 297

[signature] Abril 1980

Para obtener la longitud de la arista "a_6" de las caras laterales de las pirámides escagonales, tendremos en cuenta que "a_6" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, de catetos $h_6 = r_{ec}^6$, y otro igual al radio de la circunferencia circunscrita a la cara exagonal del Arquimediano VII, que es igual a la arista a_{VII} del mismo.

Por consiguiente, tendremos:

$$a_6 = \sqrt{(h_6)^2 + (a_{VII})^2} \qquad (7)$$

En la cual $h_6 = \frac{2}{3} r_{ec}^4$ (ver fórmula (6) de este ejercicio)

y $a_{VII} = \frac{2\sqrt{6}}{9} r_{ec}^4$ (ver fórmula (5) del modelo M-39.5, hoja 12)

Sustituyendo valores en (7), tendremos:

$$\boxed{a_6} = \sqrt{(h_6)^2 + (a_{VII})^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} r_{ec}^4\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{9} r_{ec}^4\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)^2}\, r_{ec}^4 =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{24}{81}}\, r_{ec}^4 = \sqrt{\frac{36+24}{81}}\, r_{ec}^4 = \sqrt{\frac{60}{81}}\, r_{ec}^4 = \boxed{\sqrt{\frac{20}{27}}\, r_{ec}^4}$$

de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{a_6 = \sqrt{\frac{20}{27}}\, r_{ec}^4} \qquad (8)$$

El lado de la base de la pirámide es el de la arista a_{VII} del Arquimediano VII. Su valor es

$$\boxed{a_{VII} = \frac{2\sqrt{6}}{9}\, r_{ec}^4} \qquad (9)$$

(Ver fórmula (5), hoja 12, del modelo M-39.5)

Calvache Abril 1980

Modelo M- 39,6

Las fórmulas (8) y (9) nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides exagonales rectas regulares que se adicionan al modelo M-39,5 para obtener el que se estudia.

Para este caso particular de $r_{ec}^{d} = 110$ m m, será:

$$\boxed{a_6} = \sqrt{\frac{20}{27}}\ r_{ec}^{d} \cong 0,86\ 06\ 62\ 96\ 6 \ldots \times 110 \cong \boxed{94,7 \text{ m m}}$$ 2

$$\boxed{a_{VII}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}\ r_{ec}^{d} \cong 0,54\ 43\ 31\ 05\ 4 \ldots \times 110 \cong \boxed{59,9 \text{ m m}}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO VII, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA $\frac{1}{3} d_4$

PIEZAS 1 al 11 iguales a las del Modelo M-39,5

B) PIRÁMIDES EXAGONALES, REGULARES, RECTAS, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO M-39,5

UNE A4 210 x 297

Alvarez Abril 1980

Modelo M-39.6

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

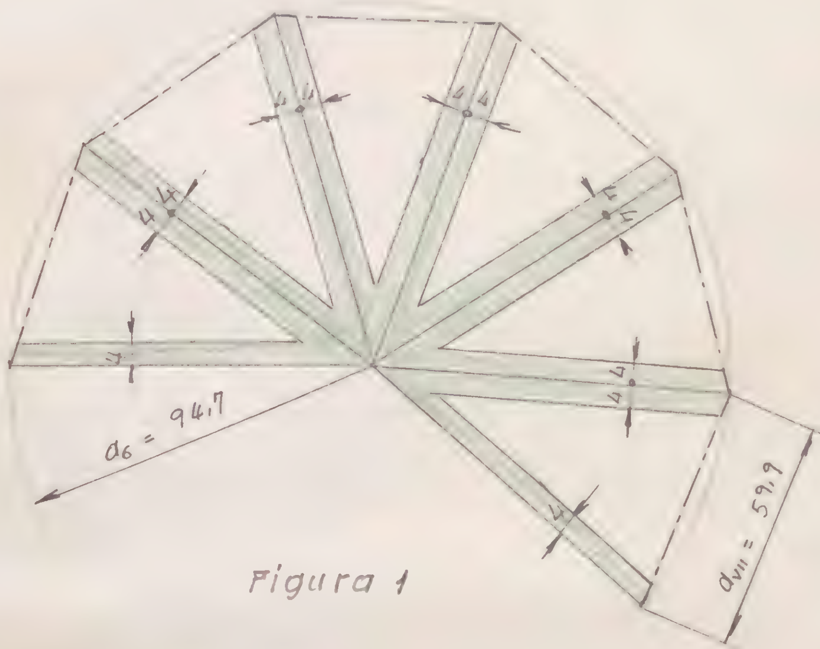


Figura 1

PIEZA Nº 12

4 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

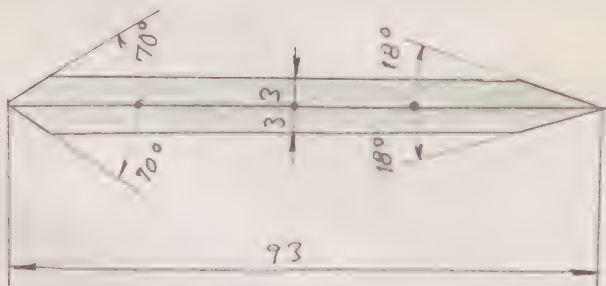


Figura 2

PIEZA Nº 2

24 (u)

Figura 2

UNE A4 210 x 297

Abril 1980



Como los cuatro vértices del tetraedro generador, y los cuatro vértices de las pirámides adicionales, rectas regulares, están sobre la esfera circunscrita de radio r_{ec}^{4} = 110 mm. y cada vértice equidista de los tres más próximos que lo rodean, al unirlos entre sí, se formará un exaedro regular convexo, en el que está inscrito el poliedro que forma el conjunto de este modelo M-39,6

Para destacar esta propiedad, completaremos este modelo con el mencionado exaedro regular convexo, de caras vaciadas. Así pues lo ampliaremos con las siguientes piezas:

c) EXAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 14 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Iguales a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-2,102

PIEZA Nº 15 UNIONES ARISTAS 12 unidades

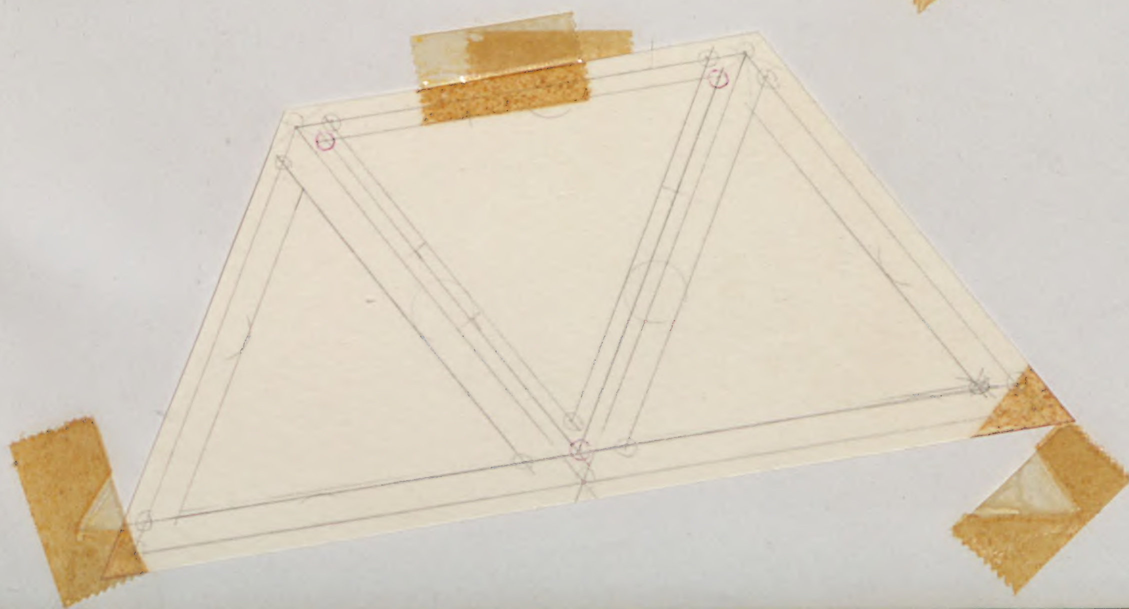
Iguales a la pieza nº 2 (figura 2) del modelo M-2,102

UNE A4 210 x 297

Abril 1960

MODELO M - 39. 6 PATRONES

4 (U)





colorchecker CLASSIC

calibrite